4. A VÉGESELEM MÓDSZER ELMOZDULÁS MODELLJE

A végeselem módszer numerikus eljárás mérnöki, fizikai feladatok közelítő megoldására. A módszer a számítástechnika fejlődésével párhuzamosan alakult ki. Jelenleg univerzális, nagyon sokféle feladat megoldására alkalmas végeselem programrendszerek állnak rendelkezésre. A gépészeti tervezőrendszerek is tartalmaznak végeselem számítások végzésére alkalmas modulokat.

Az eljárás alapgondolata:

- A keresett (ismeretlen) mezőket résztartományonként közelítjük. Az egész tartományra (testre, alkatrészre) érvényes mezőt résztartományokra felvett mezők összekapcsolásával állítjuk elő.
- A kitűzött rugalmasságtani feladat megoldását valamilyen energiaelv alkalmazásával állítjuk elő:
  - a *Lagrange*-féle variációs elvvel $(\delta \Pi = 0)$,
  - a *Castigliano*-féle variációs elvvel $(\delta K = 0)$,
  - a virtuális elmozdulások elvével.

Ezen kívül más funkcionálok is szóba jöhetnek.

Leginkább a $\delta \Pi = 0$ *Lagrange*-féle variációs elv alkalmazása az elterjedt, ahol az elmozdulásmező az elsődleges ismeretlen.

4.1. Az elmozdulásmezőn alapuló végeselem módszer felépítése

A megoldás gondolatmenete:

- A testet (alkatrészt) elvileg tetszőleges alakú, véges számú résztartományra, úgynevezett *véges elemre* bontjuk.
- Az elmozdulásmezőt elemenként külön-külön közelítjük. A közelítő függvények általában polinomok. Ezt nevezzük *lokális közelítésnek*.
- Az elemeken nevezetes (kitüntetett) pontokat, úgynevezett *csomópontokat* veszünk fel. Az elemenként felvett közelítő függvényeket a csomóponti (elmozdulás) paraméterek segítségével összeillesztjük.
- A *Lagrange*-féle variációs elv alkalmazásával a csomóponti paraméterekre lineáris algebrai egyenletrendszert kapunk.
- A lineáris algebrai egyenletrendszerből meghatározzuk a csomóponti (elmozdulás) paramétereket.
- A csomóponti paraméterek ismeretében a test (alkatrész) bármely pontjában meghatározhatók a szilárdságtani (elmozdulási, alakváltozási, feszültségi) állapotok.

4.1.1. Jelölések, elnevezések

A továbbiakban kizárólag a mátrixos jelölési módot alkalmazzuk:

$$\vec{u}(\vec{r}) \quad \rightarrow \quad \vec{u}(x,y,z) \quad \rightarrow \quad \vec{u}(X),$$

$$\underline{\underline{B}}(\vec{r}) \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{B}}(x,y,z) \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{B}}(X).$$

Az elmozdulási vektormező oszlopmátrixa: $\underline{\underline{u}}(X) = \underbrace{\begin{bmatrix} u(x,y,z) \\ v(x,y,z) \\ w(x,y,z) \end{bmatrix}}_{(3\times 1)}.$

Az alakváltozási- és feszültségi mezők oszlopmátrixai:

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(X) = \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_x(x,y,z) \\ \varepsilon_y(x,y,z) \\ \varepsilon_z(x,y,z) \\ \gamma_{xy}(x,y,z) \\ \gamma_{yz}(x,y,z) \\ \gamma_{xz}(x,y,z) \end{bmatrix}}_{(6\times 1)}, \quad \underline{\underline{\sigma}}(X) = \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_x(x,y,z) \\ \sigma_y(x,y,z) \\ \sigma_z(x,y,z) \\ \tau_{xy}(x,y,z) \\ \tau_{yz}(x,y,z) \\ \tau_{xz}(x,y,z) \end{bmatrix}}_{(6\times 1)}.$$

Itt az alakváltozási és a feszültségi tenzor egymástól különböző koordinátáit oszlopmátrixba rendezzük és alakváltozási és feszültségi vektornak nevezzük.

Az összefüggések áttekinthetősége kedvéért a mátrixok alá legtöbbször kiírjuk a méretet: $(\text{sorok száma} \times \text{oszlopok száma})$.

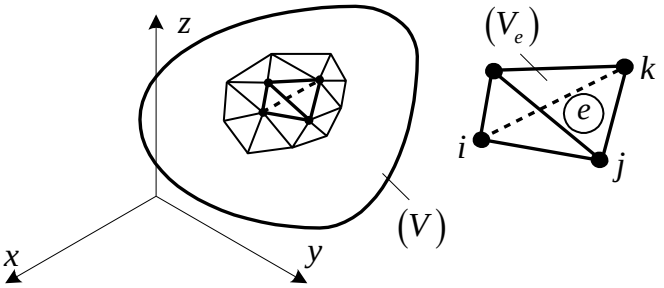
4.1.2. A rugalmasságtani feladat kitűzése

Adott: a test (alkatrész) alakja, méretei (geometriája), anyaga,
az alkatrész terhelései: $\vec{q}(x,y,z)$ a (V)-n és $\vec{p}_0(x,y,z)$ az A_p-n,
a test $\vec{u}_0$ megtámasztása A_u-n.

Meghatározandó: - az $\underline{\underline{u}}(X)$ elmozdulásmező,
- az $\underline{\underline{\varepsilon}}(X)$ alakváltozási mező,
- a $\underline{\underline{\sigma}}(X)$ feszültségi mező.

4.1.3. A rugalmasságtani feladat közelítő megoldása

A testet (alkatrészt) elvileg tetszőleges alakú, véges számú elemre (résztartományra) bontjuk fel. Az elemeken kitüntetett pontokat, úgynevezett csomópontokat veszünk fel.



Az ábrán e jelöli az elemet (résztartományt), az i, j, k, … jelölik az elem csomópontjait (pl. az ábrán látható tetraéder csúcspontjait).

Az elmozdulásmezőt elemenként közelítjük: $\underbrace{\underline{\underline{u}}^e(X)}_{(3\times1)} = \underbrace{\underline{\underline{A}}^e(X)}_{(3\times n)} \underbrace{\underline{\underline{q}}^e}_{(n\times1)}$,

ahol $\underline{\underline{u}}^e(X)$ az elem elmozdulásmezője, $\underline{\underline{A}}^e(X)$ az elem approximációs mátrixa, $\underline{\underline{q}}^e$ pedig az elem csomóponti paramétereinek vektora.

A csomóponti paraméterek elmozdulások és szögelfordulások lehetnek, amelyeket ezért a továbbiakban általánosított elmozdulásoknak, vagy általánosított elmozduláskoordinátáknak is nevezünk.

A közelítő függvényeket az $\underline{\underline{A}}^e(X)$ approximációs mátrix tartalmazza (approximáció $\equiv$ közelítés).

Az approximációs mátrixban szereplő közelítő függvények általában polinomok, ezek fokszáma határozza meg a csomóponti paraméterek *n* számát.

Az n az elem összes csomóponti paramétereinek száma, ez az elem *szabadságfoka*.

Az e jelű elem csomóponti elmozdulásvektora: $\left[\underline{\underline{q}}^e\right]^T = \left[\underline{\underline{q}}_i^T \; \underline{\underline{q}}_j^T \; \underline{\underline{q}}_k^T \; \ldots \; \underline{\underline{q}}_N^T\right]^e$,

ahol N az elem csomópontjainak száma.

Térbeli feladat esetén az e jelű elem i-edik csomópontjának elmozdulásvektora:

$$\underset{(3\times1)}{\underline{\underline{q}}_i^e} = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{bmatrix}^e .$$

Az approximációs mátrix blokkokra bontása:

$$\underline{\underline{A}}^e(X)\underline{\underline{q}}^e = \underbrace{\left[\underbrace{\underline{\underline{A}}_i^e(X)}_{(3\times3)}\underbrace{\underline{\underline{A}}_j^e(X)}_{(3\times3)}\underbrace{\underline{\underline{A}}_k^e(X)}_{(3\times3)}\ldots\underbrace{\underline{\underline{A}}_N^e(X)}_{(3\times3)}\right]}_{(3\times3N)}\underbrace{\begin{bmatrix}\underline{\underline{q}}_i^e\\ \underline{\underline{q}}_j^e\\ .\\ .\\ .\\ \underline{\underline{q}}_N^e\end{bmatrix}}_{(3N\times1)}.$$

Az approximációs mátrixban azokat az elemeket tekintjük az $\underline{\underline{A}}_i^e(X)$ blokknak, amelyek a $\underline{\underline{q}}_i^e$ elmozduláskoordinátákkal szorzódnak.

Az e elem i csomópontjához tartozó approximációs mátrix-blokk:

$$\underline{\underline{A}}_i^e(X) = \begin{bmatrix} A_{xxi}^e(X) & A_{xyi}^e(X) & A_{xzi}^e(X)\\ A_{yxi}^e(X) & A_{yyi}^e(X) & A_{yzi}^e(X)\\ A_{zxi}^e(X) & A_{zyi}^e(X) & A_{zzi}^e(X)\end{bmatrix}.$$

Az approximációs mátrix elemeinek kinematikai tartalma:

Pl. $A_{xzi}^e(X)$ az i csomópont z irányú egységnyi elmozdulása $(w_i = 1)$ hatására az e elemben előálló $u^e(X)$ x irányú elmozdulásmező.

Követelmények:

- Az $\underline{\underline{A}}^e(X)$ függvényeknek az X helykoordináták szerint deriválhatóaknak kell lenniük, mert az $\underline{\underline{u}}^e(X)$ -nek kinematikailag megengedettnek kell lennie.
- Az i csomópont elmozdulásaiból származó elmozdulásmezőből ki kell adódniuk az i csomópont elmozdulásainak: $\underline{\underline{A}}_i^e(X_i) = \underline{\underline{E}}$.
- Az i csomópont elmozdulásaiból származó elmozdulásmezőből a többi csomópontban nem léphetnek fel elmozdulások: $\underline{\underline{A}}_i^e(X_j) = \underline{\underline{A}}_i^e(X_k) = \cdots = \underline{\underline{A}}_i^e(X_N) = \underline{\underline{0}}$.

Az alakváltozási állapot elemenkénti közelítése:

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^e(X) = \underbrace{\begin{bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \varepsilon_z\\ \gamma_{xy}\\ \gamma_{yz}\\ \gamma_{xz}\end{bmatrix}^e}_{(6\times1)} = \underbrace{\begin{bmatrix}\frac{\partial u}{\partial x}\\ \frac{\partial v}{\partial y}\\ \frac{\partial w}{\partial z}\\ \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\\ \frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\\ \frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\end{bmatrix}^e}_{(6\times1)} = \underbrace{\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0\\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0\\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z}\\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0\\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x}\end{bmatrix}^e}_{(6\times3)}\underbrace{\begin{bmatrix}u^e(X)\\ v^e(X)\\ w^e(X)\end{bmatrix}}_{(3\times1)}$$

Az összefüggést tömören felírva: $\underline{\underline{\varepsilon}}^e(X) = \underline{\underline{D}}_\varepsilon^e \underline{\underline{u}}^e(X)$,

ahol $\underline{\underline{D}}_\varepsilon^e$ a differenciálási utasítások mátrixa.

Az alakváltozások kifejezhetők a csomóponti elmozdulásokkal:

$$\underset{(6\times1)}{\underline{\underline{\varepsilon}}^e(X)} = \underset{(6\times3)}{\underline{\underline{D}}^e_{\varepsilon}}\,\underset{(3\times n)}{\underline{\underline{A}}^e(X)}\,\underset{(n\times1)}{\underline{\underline{q}}^e} = \underset{(6\times n)}{\underline{\underline{B}}^e(X)}\,\underset{(n\times1)}{\underline{\underline{q}}^e}$$

A $\underline{\underline{B}}^e(X)$ mátrixot alakváltozás - csomóponti elmozdulás mátrixnak nevezzük.

A feszültségi állapot közelítése:

$$\underbrace{\underline{\underline{\sigma}}^e(X)}_{(6\times1)} = \underset{(6\times1)}{\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{bmatrix}^e} = \underbrace{\underline{\underline{C}}^e(X)}_{(6\times6)}\underbrace{\left[\underline{\underline{\varepsilon}}^e(X) - \underline{\underline{\varepsilon}}^e_T(X)\right]}_{(6\times1)}.$$

Ebben az összefüggésben $\underline{\underline{C}}^e(X)$ az anyagjellemzők mátrixa (inhomogén anyag esetén a helykoordináták függvénye). Az $\underline{\underline{\varepsilon}}^e_T(X)$ oszlopmátrix pedig a hőtágulás hatására létrejövő (kezdeti) alakváltozásokat jelöli.

Lineárisan rugalmas izotróp anyag esetén az anyagjellemzők mátrixa:

$$\underline{\underline{C}}^e = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ c_2 & c_1 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ c_2 & c_2 & c_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_3 \end{bmatrix},$$

ahol $c_1 = E\dfrac{1-\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}$, $c_2 = E\dfrac{\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}$ és $c_3 = E\dfrac{1}{2(1+\nu)} = G$.

Lineárisan rugalmas ortotróp anyag esetén, az anyagi főirányok $(1, 2, 3)$ koordináta-rendszerében az anyagjellemzők mátrixa:

$$\underline{\underline{C}}^e = \begin{bmatrix} \dfrac{1-\nu_{23}\nu_{32}}{E_2E_3\Delta} & \dfrac{\nu_{21}+\nu_{23}\nu_{31}}{E_2E_3\Delta} & \dfrac{\nu_{31}+\nu_{21}\nu_{32}}{E_2E_3\Delta} & 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{\nu_{21}+\nu_{23}\nu_{31}}{E_2E_3\Delta} & \dfrac{1-\nu_{13}\nu_{31}}{E_1E_3\Delta} & \dfrac{\nu_{32}+\nu_{12}\nu_{31}}{E_1E_3\Delta} & 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{\nu_{31}+\nu_{21}\nu_{32}}{E_2E_3\Delta} & \dfrac{\nu_{32}+\nu_{12}\nu_{31}}{E_1E_3\Delta} & \dfrac{1-\nu_{12}\nu_{21}}{E_1E_2\Delta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{13} \end{bmatrix}^e,$$

ahol $\Delta = \dfrac{1}{E_1E_2E_3}\left(1-\nu_{12}\nu_{21}-\nu_{23}\nu_{32}-\nu_{13}\nu_{31}-\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13}\right)$.

Ortotróp anyag esetén az anyagjellemzők mátrixának inverze könnyebben megjegyezhető és áttekinthetőbb szerkezetű:

$$\left[\underline{\underline{C}}^e\right]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} \end{bmatrix}^e$$

Az anyagállandó mátrix szimmetriájából következően a *Poisson* tényezők nem függetlenek:

$$\frac{\nu_{12}}{E_1} = \frac{\nu_{21}}{E_2}, \qquad \frac{\nu_{13}}{E_1} = \frac{\nu_{31}}{E_3}, \qquad \frac{\nu_{23}}{E_2} = \frac{\nu_{32}}{E_3}.$$

Az anyagi főirányok koordináta-rendszeréből az eredményeket vissza kell transzformálnunk abba a koordináta-rendszerbe, melyben vizsgálatainkat végezzük.

$$\left.\begin{aligned} \underline{\underline{\sigma}}^e(1,2,3) &\rightarrow \underline{\underline{\sigma}}^e(x,y,z) \\ \underline{\underline{\varepsilon}}^e(1,2,3) &\rightarrow \underline{\underline{\varepsilon}}^e(x,y,z) \end{aligned}\right\} \quad \text{Transzformáció!}$$

A hőmérsékletváltozásból származó alakváltozás figyelembevételéhez szükségünk van a hőtágulási együtthatók oszlopmátrixára is:

$$\underbrace{\underline{\underline{\varepsilon}}_T^e(X)}_{(6\times1)} = \underbrace{\underline{\underline{\alpha}}^e}_{(6\times1)} \underbrace{\Delta T^e(X)}_{(1\times1)}.$$

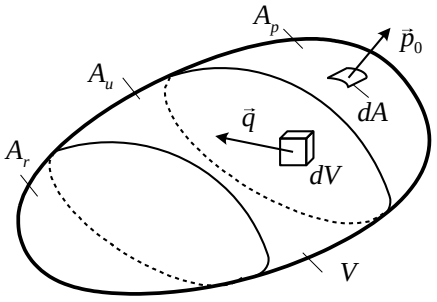
Itt $\Delta T^e(X)$ az ismert hőmérsékletmező (a hőmérséklet függhet a helytől), $\underline{\underline{\alpha}}^e$ oszlopmátrix pedig a hőtágulási együtthatók vektora:

$$\underline{\underline{\alpha}}^e = \begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_z \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^e.$$

A hőtágulás lehet iránytól függő, de leggyakrabban az izotróp eset fordul elő: $\alpha_x = \alpha_y = \alpha_z = \alpha$.

A rugalmas ágyazás figyelembevétele:

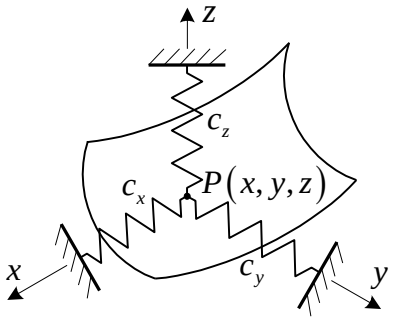
Feltételezzük, hogy a test az (A_r) felületén más rugalmas testhez kapcsolódik. Az érintkező felületen ilyenkor megoszló erőrendszer adódik át.



Az $\left(A_r\right)$ felületen fellépő $\underline{\underline{p}}_r\left(X\right)$ felületi terhelés arányos a felületen levő pontok elmozdulásával:

$$\underbrace{\underline{\underline{p}}_r^e\left(X\right)}_{(3\times1)} = -\underbrace{\underline{\underline{R}}^e\left(X\right)}_{(3\times3)}\underbrace{\underline{\underline{u}}^e\left(X\right)}_{(3\times1)},$$

ahol $\underline{\underline{R}}^e\left(X\right) = \begin{bmatrix} c_x & 0 & 0 \\ 0 & c_y & 0 \\ 0 & 0 & c_z \end{bmatrix}$ a rugóállandók / rugómerevségek mátrixa.



Az e elem teljes potenciális energiája:

$$\Pi^e = \frac{1}{2}\int_{\left(V^e\right)}\left(\underline{\underline{\varepsilon}}^e\right)^T\underline{\underline{\sigma}}^e dV - \int_{\left(V^e\right)}\left(\underline{\underline{u}}^e\right)^T\underline{\underline{q}}^e dV - \int_{\left(A_p^e\right)}\left(\underline{\underline{u}}^e\right)^T\underline{\underline{p}}^e dA - \frac{1}{2}\int_{\left(A_r^e\right)}\left(\underline{\underline{u}}^e\right)^T\underline{\underline{p}}_r^e dA.$$

A teljes potenciális energia összefüggésében

- $\frac{1}{2}\int_{\left(V^e\right)}\left(\underline{\underline{\varepsilon}}^e\right)^T\underline{\underline{\sigma}}^e dV$ az alakváltozási energia,
- $\int_{\left(V^e\right)}\left(\underline{\underline{u}}^e\right)^T\underline{\underline{q}}^e dV$ a térfogati erőrendszer munkája,
- $\int_{\left(A_p^e\right)}\left(\underline{\underline{u}}^e\right)^T\underline{\underline{p}}^e dA$ a felületi erőrendszer munkája,
- $\frac{1}{2}\int_{\left(A_r^e\right)}\left(\underline{\underline{u}}^e\right)^T\underline{\underline{p}}_r^e dA$ a rugalmasan ágyazott felületen fellépő munka.

Helyettesítsük be a teljes potenciális energia most felírt összefüggésébe a korábbiakban, a csomóponti paraméterek függvényében felírt mennyiségeket:

$$\begin{aligned}\Pi^e = &\frac{1}{2}\left(\underline{\underline{q}}^e\right)^T\int_{\left(V^e\right)}\left[\left[\underline{\underline{B}}^e\left(X\right)\right]^T\underline{\underline{C}}^e\left(X\right)\underline{\underline{B}}^e\left(X\right)\right]dV\,\underline{\underline{q}}^e - \\ &-\frac{1}{2}\left(\underline{\underline{q}}^e\right)^T\int_{\left(V^e\right)}\left[\left[\underline{\underline{B}}^e\left(X\right)\right]^T\underline{\underline{C}}^e\left(X\right)\underline{\underline{\varepsilon}}_T^e\left(X\right)\right]dV - \\ &-\left(\underline{\underline{q}}^e\right)^T\int_{\left(V^e\right)}\left[\underline{\underline{A}}^e\left(X\right)\right]^T\underline{\underline{q}}^e\left(X\right)dV - \left(\underline{\underline{q}}^e\right)^T\int_{\left(A_p^e\right)}\left[\underline{\underline{A}}^e\left(X\right)\right]^T\underline{\underline{p}}_0^e\left(X\right)dA + \\ &+\frac{1}{2}\left(\underline{\underline{q}}^e\right)^T\int_{\left(A_r^e\right)}\left[\left[\underline{\underline{A}}^e\left(X\right)\right]^T\underline{\underline{R}}^e\left(X\right)\underline{\underline{A}}^e\left(X\right)\right]dA\,\underline{\underline{q}}^e.\end{aligned}$$

Jelölések, elnevezések:

Az elem merevségi mátrixa: $\underbrace{\underline{\underline{K}}^e}_{(n\times n)} = \int_{\left(V^e\right)}\underbrace{\left[\underline{\underline{B}}^e\left(X\right)\right]^T}_{(n\times6)}\underbrace{\underline{\underline{C}}^e\left(X\right)}_{(6\times6)}\underbrace{\underline{\underline{B}}^e\left(X\right)}_{(6\times n)}dV$.

Az elem merevségi mátrixa szimmetrikus. Az összefüggésben n az elem szabadsági foka (az elem csomóponti paramétereinek száma).

A merevségi mátrix blokkokra bontása:

$$\left(\underline{\underline{q}}^e\right)^T \underline{\underline{K}}^e \underline{\underline{q}}^e = \left[\left(\underline{\underline{q}}_i^e\right)^T \quad \left(\underline{\underline{q}}_j^e\right)^T \quad \left(\underline{\underline{q}}_k^e\right)^T \quad \cdots \quad \left(\underline{\underline{q}}_N^e\right)^T\right] \begin{bmatrix} \underline{\underline{K}}_{ii}^e & \underline{\underline{K}}_{ij}^e & \underline{\underline{K}}_{ik}^e & \cdots & \underline{\underline{K}}_{iN}^e \\ \underline{\underline{K}}_{ji}^e & \underline{\underline{K}}_{jj}^e & \underline{\underline{K}}_{jk}^e & \cdots & \underline{\underline{K}}_{jN}^e \\ \underline{\underline{K}}_{ki}^e & \underline{\underline{K}}_{kj}^e & \underline{\underline{K}}_{kk}^e & \cdots & \underline{\underline{K}}_{kN}^e \\ . & . & . & \cdots & . \\ \underline{\underline{K}}_{Ni}^e & \underline{\underline{K}}_{Nj}^e & \underline{\underline{K}}_{Nk}^e & \cdots & \underline{\underline{K}}_{NN}^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{q}}_i^e \\ \underline{\underline{q}}_j^e \\ \underline{\underline{q}}_k^e \\ . \\ \underline{\underline{q}}_N^e \end{bmatrix}.$$

A merevségi mátrix egy tetszőleges blokkja: $\underline{\underline{K}}_{ij}^e = \begin{bmatrix} K_{xx}^e & K_{xy}^e & K_{xz}^e \\ K_{yx}^e & K_{yy}^e & K_{yz}^e \\ K_{zx}^e & K_{zy}^e & K_{zz}^e \end{bmatrix}_{ij}.$

A merevségi mátrix elemeinek fizikai tartalma:

Pl. K_{xzij}^e jelenti az e elem j jelű csomópontjában fellépő egységnyi z irányú elmozduláshoz tartozó x irányú erő nagyságát az i jelű csomópontban.

Az elem rugalmas ágyazásból származó merevségi mátrixa:

$$\underline{\underline{K}}_r^e = \int_{\left(A_r^e\right)} \left[\left[\underline{\underline{A}}^e(X)\right]^T \underline{\underline{R}}^e(X) \underline{\underline{A}}^e(X)\right] dA.$$

A $\underline{\underline{K}}_r^e$ szintén szimmetrikus mátrix. A rugalmas ágyazásból származó merevségi mátrixban csak azokhoz a csomópontokhoz tartozó blokkok különböznek nullától, amely csomópontok rajta vannak az elem rugalmasan ágyazott felületén.

Az elem csomóponti terhelésvektora három részből áll:

- *A térfogati terhelésből származó csomóponti terhelésvektor:*

$$\underset{(n\times 1)}{\underline{\underline{f}}_q^e} = \int_{\left(V^e\right)} \underbrace{\left[\underline{\underline{A}}^e(X)\right]^T}_{(n\times 3)} \underbrace{\underline{\underline{q}}^e(X)}_{(3\times 1)} dV,$$

ahol a térfogaton megoszló terhelés $\underline{\underline{q}}^e(X)$ sűrűségvektora (intenzitásvektora) az elemen ismert. A $\underline{\underline{q}}^e(X)$ lehet *Pl.* önsúly, forgásból származó terhelés, vagy a test gyorsuló (lassuló) mozgásából adódó tehetetlenségi terhelés.

- *A felületi terhelésből származó csomóponti terhelésvektor:*

$$\underline{\underline{f}}_p^e = \int_{\left(A_p^e\right)} \left[\underline{\underline{A}}^e(X)\right]^T \underline{\underline{p}}_0^e(X) dA.$$

Itt $\underline{\underline{p}}_0^e(X)$ az elem valamelyik felületén megoszló (ismert) terhelés sűrűségvektora.

- *A hőmérsékletváltozásból származó csomóponti terhelésvektor:*

$$\underline{\underline{f}}_T^e = \frac{1}{2} \int_{\left(V^e\right)} \left[\underline{\underline{B}}^e(X)\right]^T \underline{\underline{C}}^e(X) \underline{\underline{\alpha}}^e(X) \Delta T^e(X) dV.$$

Ebben a kifejezésben $\left\{\begin{array}{c} \text{a } \underline{\underline{C}}^e(X) \\ \text{az } \underline{\underline{\alpha}}^e(X) \\ \text{a } \Delta T^e(X) \end{array}\right\}$ adott (ismert) mennyiségek.

- *Az elem csomóponti terhelésvektora:* $\underline{\underline{f}}^e = \underline{\underline{f}}_q^e + \underline{\underline{f}}_p^e + \underline{\underline{f}}_T^e$.

A csomóponti terhelésvektor blokkokra bontása:

$$\left(\underline{\underline{q}}^e\right)^T \underline{\underline{f}}^e = \left[\left(\underline{\underline{q}}_i^e\right)^T \quad \left(\underline{\underline{q}}_j^e\right)^T \quad \left(\underline{\underline{q}}_k^e\right)^T \quad \cdots \quad \left(\underline{\underline{q}}_N^e\right)^T\right] \begin{bmatrix} \underline{\underline{f}}_i^e \\ \underline{\underline{f}}_j^e \\ \vdots \\ \underline{\underline{f}}_N^e \end{bmatrix}.$$

Egy tetszőleges blokk: $\underline{\underline{f}}_j^e = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{bmatrix}_j^e$.

Az f_{yj}^e az adott külső terhelést (térfogati, felületi, hőmérsékleti) a j csomópontban helyettesítő koncentrált erőnek az y irányú koordinátáját jelenti.

A felületi terhelésből származó csomóponti terhelésvektorban csak azokhoz a csomópontokhoz tartozó blokkok nem nullák, amely csomópontok rajta vannak az elemnek a felületen megoszló erőkkel terhelt részén.

Az elem teljes potenciális energiája a bevezetett jelölések felhasználásával:

$$\Pi^e = \frac{1}{2}\underbrace{\left(\underline{\underline{q}}^e\right)^T}_{(1\times n)} \underbrace{\left[\underline{\underline{K}}^e + \underline{\underline{K}}_r^e\right]}_{(n\times n)} \underbrace{\underline{\underline{q}}^e}_{(n\times 1)} - \underbrace{\left(\underline{\underline{q}}^e\right)^T}_{(1\times n)} \underbrace{\left[\underline{\underline{f}}_q^e + \underline{\underline{f}}_p^e + \underline{\underline{f}}_T^e\right]}_{(n\times 1)}.$$

Az egész test teljes potenciális energiáját a Π^e (skaláris) mennyiség összegzésével kapjuk:

$$\Pi = \sum_{e=1}^{Q} \Pi^e ,$$

ahol Q a testet alkotó elemek (résztartományok) száma.

A *Lagrange*-féle variációs elv szerint:

$$\delta\Pi = \delta\left(\Pi^1 + \Pi^2 + \ldots + \Pi^Q\right) = \delta\left(\sum_{e=1}^{Q} \Pi^e\right) = 0 .$$

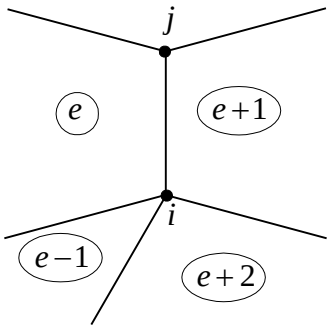
A potenciális energia minimuma elv (a *Lagrange*-féle variációs elv) csak az egész testre érvényes, de az egyes elemekre külön-külön nem!

$$\delta\Pi = 0, \qquad \text{de} \quad \delta\Pi^e \neq 0 !$$

A potenciális energia összegzésénél figyelembe kell venni, hogy az elemek közös (kapcsolódó) csomópontjainak azonos az elmozdulása.

Ezt figyelembe véve a test potenciális energiája az alábbi módon írható:

$$\Pi = \sum_{e=1}^{Q} \Pi^e = \frac{1}{2}\underline{\underline{q}}^T \underline{\underline{K}}\,\underline{\underline{q}} - \underline{\underline{q}}^T \left(\underline{\underline{f}}_q + \underline{\underline{f}}_p + \underline{\underline{f}}_T\right).$$



$$\underline{\underline{q}}_i^{e-1} = \underline{\underline{q}}_i^e = \underline{\underline{q}}_i^{e+1} = \underline{\underline{q}}_i^{e+2}$$

$$\underline{\underline{q}}_j^e = \underline{\underline{q}}_j^{e+1} = \ldots$$

Az egész test csomóponti elmozdulásvektora: $\underline{\underline{q}}^T = \begin{bmatrix} \underline{\underline{q}}_1^T & \underline{\underline{q}}_2^T & \cdots & \underline{\underline{q}}_i^T & \cdots & \underline{\underline{q}}_M^T \end{bmatrix}$,

ahol $\underline{\underline{q}}_i^T = \begin{bmatrix} u_i & v_i & w_i \end{bmatrix}$. M a test csomópontjainak száma, $3M$ pedig a test szabadságfoka.

Az egész test merevségi mátrixa:

$$\underline{\underline{K}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \sum\limits_{e\in 1,1} \underline{\underline{K}}_{11}^e & \sum\limits_{e\in 1,2} \underline{\underline{K}}_{12}^e & \cdots & \sum\limits_{e\in 1,j} \underline{\underline{K}}_{1j}^e & \cdots & \sum\limits_{e\in 1,M} \underline{\underline{K}}_{1M}^e \\ \sum\limits_{e\in 2,1} \underline{\underline{K}}_{21}^e & \sum\limits_{e\in 2,2} \underline{\underline{K}}_{22}^e & \cdots & \sum\limits_{e\in 2,j} \underline{\underline{K}}_{2j}^e & \cdots & \sum\limits_{e\in 2,M} \underline{\underline{K}}_{2M}^e \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \sum\limits_{e\in i,1} \underline{\underline{K}}_{i1}^e & \sum\limits_{e\in i,2} \underline{\underline{K}}_{i2}^e & \cdots & \sum\limits_{e\in i,j} \underline{\underline{K}}_{ij}^e & \cdots & \sum\limits_{e\in i,M} \underline{\underline{K}}_{iM}^e \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \sum\limits_{e\in M,1} \underline{\underline{K}}_{M1}^e & \sum\limits_{e\in M,2} \underline{\underline{K}}_{M2}^e & \cdots & \sum\limits_{e\in M,j} \underline{\underline{K}}_{Mj}^e & \cdots & \sum\limits_{e\in M,M} \underline{\underline{K}}_{MM}^e \end{bmatrix}}_{(3M\times 3M)}.$$

Az egész test $\underline{\underline{K}}$ merevségi mátrixa is szimmetrikus.

A $\sum\limits_{e\in i,j} \underline{\underline{K}}_{ij}^e$ blokk jelentése: minden olyan e elem $\underline{\underline{K}}_{ij}^e$ blokkját összegezni kell, amely e elem az i és j csomópontot tartalmazza.

Az egész test csomóponti terhelésvektora:

$$\underline{\underline{f}} = \underline{\underline{f}}_q + \underline{\underline{f}}_p + \underline{\underline{f}}_T = \begin{bmatrix} \sum\limits_{e\in 1} \underline{\underline{f}}_{q1}^e \\ \sum\limits_{e\in 2} \underline{\underline{f}}_{q2}^e \\ \vdots \\ \sum\limits_{e\in M} \underline{\underline{f}}_{qM}^e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sum\limits_{e\in 1} \underline{\underline{f}}_{p1}^e \\ \sum\limits_{e\in 2} \underline{\underline{f}}_{p2}^e \\ \vdots \\ \sum\limits_{e\in M} \underline{\underline{f}}_{pM}^e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sum\limits_{e\in 1} \underline{\underline{f}}_{T1}^e \\ \sum\limits_{e\in 2} \underline{\underline{f}}_{T2}^e \\ \vdots \\ \sum\limits_{e\in M} \underline{\underline{f}}_{TM}^e \end{bmatrix}.$$

Az $\sum\limits_{e\in i} \underline{\underline{f}}_i^e$ blokk jelentése: minden olyan e elem $\underline{\underline{f}}_i^e$ terhelési vektor blokkját összegezni kell, amely e elem az i csomópontot tartalmazza.

A kinematikai peremfeltételek figyelembe vétele:

Legyen például $\underline{\underline{q}}_i = \underline{\underline{0}}$ és $\underline{\underline{q}}_j = \underline{\underline{0}}$.

A test teljes potenciális energiája:

$$\Pi = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \underline{\underline{q}}_1^T & \cdots & \underline{\underline{q}}_i^T & \underline{\underline{q}}_j^T & \cdots & \underline{\underline{q}}_M^T \\ & & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{K}}_{11} & \cdots & \underline{\underline{K}}_{1i} & \underline{\underline{K}}_{1j} & \cdots & \underline{\underline{K}}_{1M} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \underline{\underline{K}}_{i1} & & \underline{\underline{K}}_{ii} & \underline{\underline{K}}_{ij} & & \underline{\underline{K}}_{iM} \\ \underline{\underline{K}}_{j1} & & \underline{\underline{K}}_{ji} & \underline{\underline{K}}_{jj} & & \underline{\underline{K}}_{jM} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \underline{\underline{K}}_{M1} & & \underline{\underline{K}}_{Mi} & \underline{\underline{K}}_{Mj} & & \underline{\underline{K}}_{MM} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{q}}_1 \\ \vdots \\ \underline{\underline{q}}_i = \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{q}}_j = \underline{\underline{0}} \\ \vdots \\ \underline{\underline{q}}_M \end{bmatrix} -$$

$$- \begin{bmatrix} \underline{\underline{q}}_1^T & \cdots & \underline{\underline{q}}_i^T & \underline{\underline{q}}_j^T & \cdots & \underline{\underline{q}}_M^T \\ & & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{f}}_1 \\ \vdots \\ \underline{\underline{f}}_i \\ \underline{\underline{f}}_j \\ \vdots \\ \underline{\underline{f}}_M \end{bmatrix}$$

A $\underline{\underline{q}}^T$ -val balról történő mátrixszorzás hatására a $\underline{\underline{K}}$ merevségi mátrix i -edik és j -edik blokksora $\underline{\underline{0}}$ -val szorzódik. A $\underline{\underline{q}}^T$ -tal jobbról történő mátrixszorzás hatására pedig a $\underline{\underline{K}}$ i -edik és j -edik blokkoszlopa szorzódik zérussal.

A $\underline{\underline{q}}_i = \underline{\underline{0}}$ és $\underline{\underline{q}}_j = \underline{\underline{0}}$ kinematikai peremfeltételek figyelembevételéhez tehát a $\underline{\underline{K}}$ i -edik és j -edik blokksorát, blokkoszlopát, valamint az $\underline{\underline{f}}$ csomóponti terhelésvektor i -edik blokksorát törölni kell.

A $\underline{\underline{q}}_i$ és $\underline{\underline{q}}_j$ paraméterek nem fognak az (ismeretlen) csomóponti elmozdulás vektorban szerepelni.

Ha $\underline{\underline{\tilde{q}}}$ a megmaradó ismeretlen csomóponti elmozdulásokat tartalmazó vektort, $\underline{\underline{\tilde{K}}}$ és $\underline{\underline{\tilde{f}}}$ pedig azt a merevségi mátrixot és csomóponti terhelésvektort jelöli, amelyeken végrehajtottuk a peremfeltételeknek megfelelő sor- és oszlop törléseket, akkor
a *Lagrange*-féle variációs elv:

$$\delta\Pi = \delta\left[\frac{1}{2}\underline{\underline{\tilde{q}}}^T \underline{\underline{\tilde{K}}}\,\underline{\underline{\tilde{q}}} - \underline{\underline{\tilde{q}}}^T\left(\underline{\underline{\tilde{f}}}_q + \underline{\underline{\tilde{f}}}_p + \underline{\underline{\tilde{f}}}_T\right)\right] = \left(\delta\underline{\underline{\tilde{q}}}^T\right)\underline{\underline{\tilde{K}}}\,\underline{\underline{\tilde{q}}} - \left(\delta\underline{\underline{\tilde{q}}}^T\right)\underbrace{\left(\underline{\underline{\tilde{f}}}_q + \underline{\underline{\tilde{f}}}_p + \underline{\underline{\tilde{f}}}_T\right)}_{\underline{\underline{\tilde{f}}}} = 0\,.$$

$$\delta\Pi = \left(\delta\underline{\underline{\tilde{q}}}^T\right)\left[\underline{\underline{\tilde{K}}}\,\underline{\underline{\tilde{q}}} - \underline{\underline{\tilde{f}}}\right] = 0\,.$$

A $\delta\underline{\underline{\tilde{q}}}$ minden koordinátája tetszőleges (de nem nulla), hiszen a kinematikai peremfeltételekben adott zérusértékű elmozdulások $\underline{\underline{\tilde{q}}}$ -ban már nem szerepelnek.

Mivel $\delta\underline{\underline{\tilde{q}}}$ tetszőleges, ezért a szögletes zárójelben álló kifejezésnek kell eltűnnie:

$$\underline{\underline{\tilde{K}}}\,\underline{\underline{\tilde{q}}} - \underline{\underline{\tilde{f}}} = \underline{\underline{0}}\,.$$

A $\underline{\underline{\tilde{q}}}$ csomóponti elmozdulásokra inhomogén lineáris algebrai egyenletrendszert kapunk:

$$\underline{\underline{\tilde{K}}}\,\underline{\underline{\tilde{q}}} = \underline{\underline{\tilde{f}}}\,.$$

A végeselem számításnál elkövetett tipikus adatbeviteli hibák:

- Nem adjuk meg az anyagjellemzőket.
- Nem adjuk meg a kinematikai peremfeltételeket.

Bármelyik hiba elkövetése esetén a test (rendszer) $\underline{\underline{K}}$ merevségi mátrixa szinguláris lesz.

Ha nem adunk meg kinematikai peremfeltételt - azaz nincs megtámasztás - akkor a test tetszőleges nagyságú merevtestszerű mozgásra lesz képes. Matematikai szempontból ez azt jelenti, hogy lineáris algebrai egyenletrendszernek végtelen sok megoldása lesz.

A kinematikai terhelés kezelése

Kinematikai terhelés: az a terhelési mód, amikor a test bizonyos pontjainak elmozdulását írjuk elő, azaz kinematikai terhelés esetén pl.: $\underline{\underline{q}}_k$, $\underline{\underline{q}}_l$ adott érték.

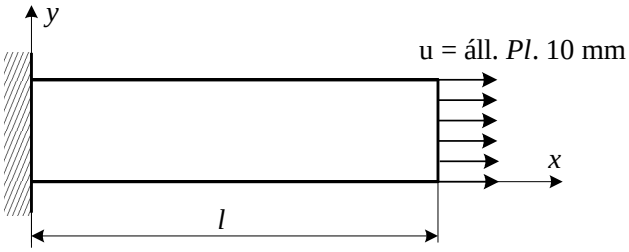
Amennyiben csak kinematikai terhelést adunk a szerkezetre, akkor az eddigiek alapján az egyenletrendszer jobb oldalán $\underline{\underline{\tilde{f}}} = \underline{\underline{0}}$ áll.

Kinematikai terhelés esetén a *Lagrange*-féle variációs elv:

$$\delta\Pi = \left(\delta \underline{\underline{q}}\right)^T \underline{\underline{K}}\,\underline{\underline{q}} = \left[\left(\delta \underline{\underline{q}}_1\right)^T \quad \left(\delta \underline{\underline{q}}_2\right)^T \quad \cdots \quad \left(\delta \underline{\underline{q}}_k\right)^T \quad \left(\delta \underline{\underline{q}}_l\right)^T \quad \cdots \quad \left(\delta \underline{\underline{q}}_M\right)^T\right] \underline{\underline{K}} \begin{bmatrix} \underline{\underline{q}}_1 \\ \underline{\underline{q}}_2 \\ \vdots \\ \underline{\underline{q}}_k \\ \underline{\underline{q}}_l \\ \vdots \\ \underline{\underline{q}}_M \end{bmatrix} = \underline{\underline{0}}\,.$$

Mivel $\underline{\underline{q}}_k$ és $\underline{\underline{q}}_l$ adott elmozdulások, ezért ezek variációja $\delta\underline{\underline{q}}_k = \delta\underline{\underline{q}}_l = \underline{\underline{0}}$. Ezért a $\underline{\underline{K}}$ merevségi mátrix $\underline{\underline{K}}_{ki}$ és $\underline{\underline{K}}_{li}\left(i = 1,2,...,M\right)$ blokksorai $\underline{\underline{0}}$-val szorzódnak, azaz ezeket az egyenleteket elhagyhatjuk.

Pl.



A $\underline{\underline{K}}$ merevségi mátrix $\underline{\underline{K}}_{ik}$ és $\underline{\underline{K}}_{il}\left(i = 1,2,...,M\right)$ blokk oszlopai pedig a megadott elmozdulásokkal szorzódnak, ezért ezek ismert értékek lesznek, tehát átrendezhetők az egyenletrendszer jobb oldalára.

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{K}}_{11} & \underline{\underline{K}}_{12} & \cdots & \underline{\underline{K}}_{1M} \\ \underline{\underline{K}}_{21} & \underline{\underline{K}}_{22} & \cdots & \underline{\underline{K}}_{2M} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \underline{\underline{K}}_{M1} & \underline{\underline{K}}_{M2} & \cdots & \underline{\underline{K}}_{MM} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{q}}_1 \\ \underline{\underline{q}}_2 \\ \vdots \\ \underline{\underline{q}}_M \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{\underline{K}}_{1k}\underline{\underline{q}}_k + \underline{\underline{K}}_{1l}\underline{\underline{q}}_l \\ \underline{\underline{K}}_{2k}\underline{\underline{q}}_k + \underline{\underline{K}}_{2l}\underline{\underline{q}}_l \\ \vdots \\ \underline{\underline{K}}_{Mk}\underline{\underline{q}}_k + \underline{\underline{K}}_{Ml}\underline{\underline{q}}_l \end{bmatrix}}_{\text{ismert}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} \\ \vdots \\ \underline{\underline{0}} \end{bmatrix}.$$

A kinematikai terhelés esetén megoldandó egyenletrendszer:

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{K}}_{11} & \underline{\underline{K}}_{12} & \cdots & \underline{\underline{K}}_{1M} \\ \underline{\underline{K}}_{21} & \underline{\underline{K}}_{22} & \cdots & \underline{\underline{K}}_{2M} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \underline{\underline{K}}_{M1} & \underline{\underline{K}}_{M2} & \cdots & \underline{\underline{K}}_{MM} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{q}}_1 \\ \underline{\underline{q}}_2 \\ \vdots \\ \underline{\underline{q}}_M \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\underline{\underline{K}}_{1k}\underline{\underline{q}}_k - \underline{\underline{K}}_{1l}\underline{\underline{q}}_l \\ -\underline{\underline{K}}_{2k}\underline{\underline{q}}_k - \underline{\underline{K}}_{2l}\underline{\underline{q}}_l \\ \vdots \\ -\underline{\underline{K}}_{Mk}\underline{\underline{q}}_k - \underline{\underline{K}}_{Ml}\underline{\underline{q}}_l \end{bmatrix}}_{\text{csomóponti kinematikai terhelésvektor}}$$

Azokat a csomóponti terheléseket, melyek a megadott (előírt) elmozdulásokat létrehozzák, csomóponti kinematikai tehervektornak nevezzük.

4.2. A végeselem módszer konvergenciája, mechanikai modellezés

A végeselem módszer alkalmazása során két kérdés merül fel:

- A végeselem felosztás sűrítésével közeledünk-e a feladat pontos (egzakt) megoldásához?
- Milyen feladat pontos megoldásáról van szó?

- *Valóságos mérnöki feladat:*

A test (alkatrész) alakja és méretei,
A test anyagjellemzői,
A terhelések (ismert erők),
A megtámasztások (ismert elmozdulások)
} ismertek.

⇓ Egyszerűsítések (mechanikai modellalkotás).

- *Mechanikai feladat (mechanikai modell):*

- Geometriai modellezés: Rúdszerkezetek,
  Sík-alakváltozási feladat,
  Általánosított sík-feszültségi *feladat*,
  Forgásszimmetrikus feladat,
  } 2D modellek
  Lemez feladat,
  Héj feladat,
  3D feladat,
  stb.
- Anyagi modellezés: Lineárisan rugalmas izotróp anyag,
  Lineárisan rugalmas ortotróp anyag,
  Rugalmas-képlékeny anyag,
  stb.
- A terhelés modellezése: Térfogaton megoszló: önsúly, forgásból, gyorsulásból származó,
  Felületen megoszló,
  Koncentrált.
- A megtámasztás modellezése: Felületen,
  Vonal mentén,
  Pontban.

⇓ Egyszerűsítés/közelítés (végeselemes számítás).

- *A végeselem módszer:*

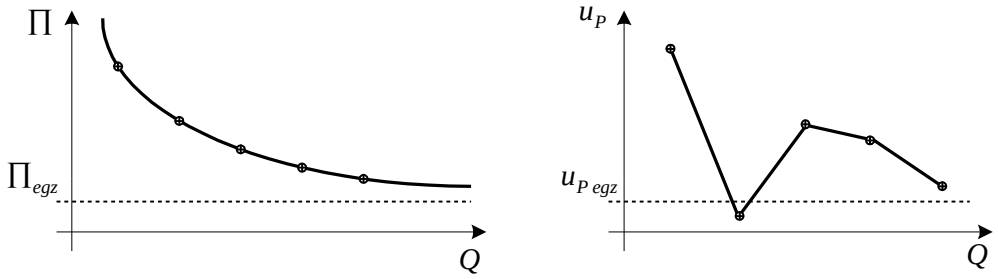
Az alkalmazott elemek alakjának megválasztása.
Az elemekre bontás sűrűségének megválasztása.
Az elemek közelítő függvényeinek megválasztása.

Válasz a 2. kérdésre: A mechanikai feladat egzakt (pontos) megoldását szeretnénk minél jobban megközelíteni.

Válasz az 1. kérdésre: A végeselem módszer energia értelemben monoton konvergens akkor, ha az elemek kielégítenek néhány feltételt.

Az energia értelemben vett monoton konvergencia azt jelenti, hogy egyre sűrűbb végeselem felosztással (végeselem hálózattal) a Π tényleges minimumát egyre jobban megközelítő teljes potenciális energiát kapunk.

A monoton konvergencia csak a Π vonatkozásában áll fenn, tehát nem biztos, hogy például az elmozdulásmező, vagy a feszültségmező egy adott pontban folyamatosan közeledik az egzakt értékekhez.



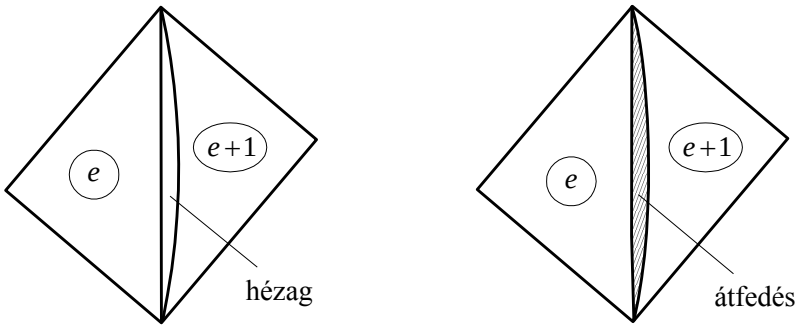
A diagramokon Π_{egz}, $u_{P\,egz}$ a pontos megoldáshoz tartozó potenciális energia, illetve elmozdulás érték és Q az elemek száma, ami végeselem felosztás sűrűségét jellemzi.

A monoton konvergencia feltételei:

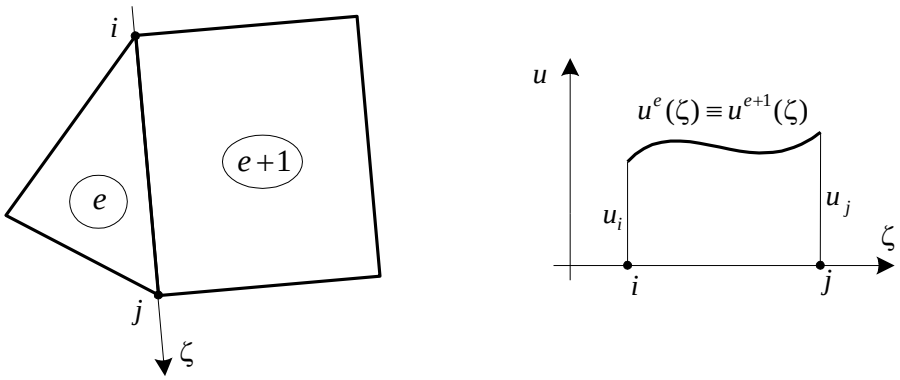
- Az elemhálónak és a közelítő elmozdulásmezőnek *kompatibilisnek* kell lennie. Az elemek között sem hézag, sem átfedés nem lehet.

  Kompatibilis elmozdulásmező: az approximációs függvényeknek biztosítaniuk kell az elemek belsejében és az elemek határain az elmozdulásmezők és az elmozdulásmezők funkcionálban szereplő hely szerinti deriváltjainál eggyel kisebb fokszámú deriváltjainak folytonosságát.

  A következő ábra az elemek hézag- és átfedés-mentességi követelményét szemlélteti. A végeselemek között sem hézag, sem átfedés nem megengedett.



  Az alábbi ábra az elmozdulásmező folytonossági követelményét szemlélteti ara az esetre, amikor a funkcionálban legfeljebb elsőrendű deriváltak fordulnak elő. Ekkor az *ij* elemoldalon az *e* jelű elemről és az (*e+1*) lokalizált (adódó) elmozdulásnak azonosnak kell lennie.



- Az *elemnek teljesnek* kell lennie.

  Teljes az elem, ha az elemen felvett közelítő függvények egzakt módon leírnak egy konstans alakváltozási állapotot és az elemben merevtestszerű mozgás esetén nem keletkezik alakváltozás (feszültség). Ez akkor teljesül, ha a közelítő függvények tartalmaznak egy teljes lineáris (első fokú) polinomot.

A teljes polinomok síkbeli esetben:

teljes 0. fokú: 1

teljes 1. fokú: $x \quad y$

teljes 2. fokú: $x^2 \quad xy \quad y^2$

teljes 3. fokú: $x^3 \quad x^2y \quad xy^2 \quad y^3$

Pl. a teljes harmadfokú polinom nemcsak a „teljes 3. fokú” sorban álló hatványokat, hanem az előtte lévő valamennyi sorban található hatványt is tartalmazza.

4.3. Rúdszerkezetek

Rúdszerkezetekként modellezhetjük például a villamos távvezetékek tartóoszlopait, egyes hídszerkezeteket, járművek (autóbusz, vasúti kocsi) vázszerkezetét, stb.

Rúdszerkezetek végeselem modellezése során a következő feltételezésekkel élünk:

- A szerkezet egyenes középvonalú rudakból áll (középvonal $\equiv S$ ponti szál).
- A ξ, η tengely a rúd keresztmetszeteinek S ponti tehetetlenségi főtengelye.
- A szerkezet rúdjaiban szabad csavarás lép fel (a rúd pontjai a csavarás során a rúd középvonalának irányában szabadon elmozdulhatnak).

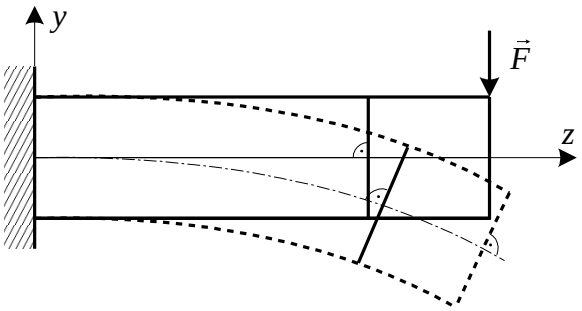
4.3.1. Rúdelméletek

Bernoulli-féle rúdelmélet

A *Bernoulli*[1]-féle rúdelmélet nem veszi figyelembe a rúdnak a nyírásból származó alakváltozását.

Hipotézis: hajlításnál a rúd keresztmetszetei síkok maradnak és merőlegesek maradnak az alakváltozott középvonalra. A Bernoulli hipotézis következménye:

$\gamma_{yz} = \gamma_{zy} = 0$.



Timoshenko-féle rúdelmélet

A *Timoshenko*[2]-féle rúdelmélet figyelembe veszi a nyírási alakváltozást.

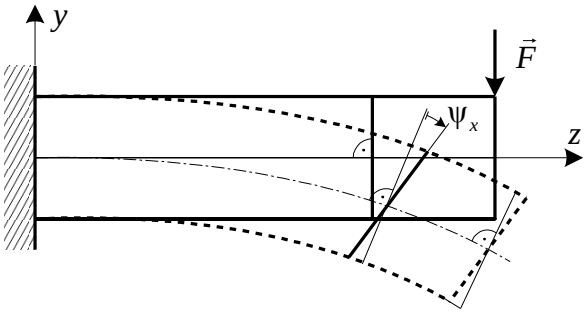
Hipotézis: hajlításnál keresztmetszetei síkok maradnak, de nem maradnak merőlegesek az alakváltozott középvonalra.

A *Timoshenko* hipotézis következménye:

$\gamma_{yz} = \psi_x \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \tau_{yz} = G\gamma_{yz} = G\psi_x$.

A τ_{yz} (a feltételezés szerint) az egész keresztmetszet mentén állandó.

Az egyensúlyi egyenletből számított τ_{yz} nem állandó a keresztmetszeten, például téglalap keresztmetszet esetén a τ_{yz} eloszlás parabolikus.



A nyírófeszültségi eredő (a nyíróerő):

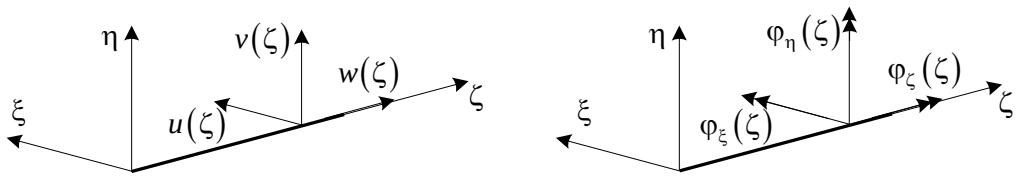
$$T_y = \int_{(A)} \tau_{yz} dA = A_T G\psi_x = \kappa A G\psi_x . \qquad A_T = \kappa A \text{ - nyírási felület.}$$

[1] Daniel Bernoulli (1700-1782) holland-svájci matematikus.
[2] Stepan Prokofjevich Timoshenko (1878-1972) orosz (ukrán) mérnök.

A nyírásból származó alakváltozási energia számításához van szükség az A_T nyírási felület bevezetésére. Téglalap keresztmetszetű rudaknál a κ nyírási tényező értéke $5/6$.

A rúdelméletek összefüggéseinek összefoglalása.

A keresztmetszetek szögelfordulásait az ábrákon kettős nyíllal jelöljük.



A végeselem eljárás elmozdulás módszerénél minden további mechanikai mennyiséget az elmozdulásokból/szögelfordulásokból származtatunk.

A rúd középvonalán lévő pontok koordinátái: $u = u(\zeta)$, $v = v(\zeta)$, $w = w(\zeta)$.

A rúdkeresztmetszetek szögelfordulásai: $\varphi_\xi = \varphi_\xi(\zeta)$, $\varphi_\eta = \varphi_\eta(\zeta)$, $\varphi_\zeta = \varphi_\zeta(\zeta)$.

A Bernoulli-féle rúdelmélet összefüggései:

Az elmozdulás és szögelfordulás mezők kapcsolata az igénybevételekkel:

$$\left.\begin{matrix} u(\zeta) \\ v(\zeta) \end{matrix}\right\} \to \text{hajlítás}, \qquad \left.\begin{matrix} \varphi_\xi = -\dfrac{dv(\zeta)}{d\zeta} \\ \varphi_\eta = \dfrac{du(\zeta)}{d\zeta} \end{matrix}\right\} \to \text{hajlítás}, \qquad \varphi_\zeta(\zeta) \to \text{csavarás}.$$

$$w(\zeta) \to \text{húzás-nyomás},$$

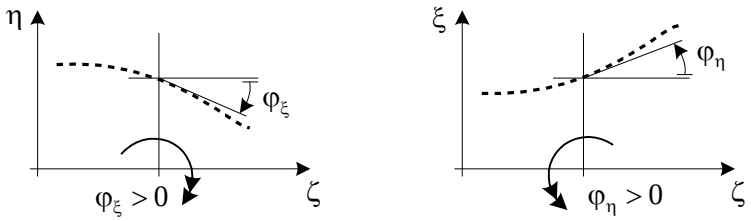
Független mezők: $u(\zeta)$, $v(\zeta)$, $w(\zeta)$, $\varphi_\zeta(\zeta)$.

A *húzás-nyomás* összefüggései: $\varepsilon_\zeta = \dfrac{dw}{d\zeta}$, $\sigma_\zeta = E\varepsilon_\zeta$, $N = A\sigma_\zeta = AE\varepsilon_\zeta = AEw'$.

A *ferde hajlítás* (két egyenes hajlítás szuperpozíciója) összefüggései:

$$\kappa_\xi = \frac{d\varphi_\xi}{d\zeta} = -\frac{d^2v}{d\zeta^2}, \quad M_{h\xi} = I_\xi E\kappa_\xi = -I_\xi Ev'', \quad \kappa_\eta = \frac{d\varphi_\eta}{d\zeta} = -\frac{d^2u}{d\zeta^2}, \quad M_{h\eta} = I_\eta E\kappa_\eta = -I_\eta Eu''.$$

A *csavarás* összefüggései: $\vartheta = \dfrac{d\varphi_\zeta}{d\zeta}$ – fajlagos szögelfordulás, $M_c = I_c G\vartheta = I_c G\varphi_\zeta'$.



A *Bernoulli*-féle rúdelmélet esetén a Π potenciális energiában az ismeretlen mezők (amelyekre közelítő függvényeket veszünk fel) első deriváltjai (w' és φ_ζ') és második deriváltjai (u'' és v'') is szerepelnek.

Az 1. konvergencia kritériumból következően:

- Ha csak első deriváltak szerepelnek a Π-ben, akkor maguknak az ismeretlen mezőknek kell az elemek kapcsolódásánál megegyezniük.
- Ha második deriváltak is szerepelnek a Π-ben, akkor a mezőknek és első deriváltjuknak is meg kell egyezniük.

A Bernoulli-féle rúdelméletnél a második eset áll fenn, ezért az elemhatárokon a mezők és első deriváltjaik folytonosságát is biztosítani kell.

A Timoshenko-féle rúdelmélet összefüggései:

Független mezők: $u(\zeta)$, $v(\zeta)$, $w(\zeta)$, $\varphi_\xi(\zeta)$, $\varphi_\eta(\zeta)$, $\varphi_\zeta(\zeta)$.

Húzás-nyomás: $\varepsilon_\zeta = \dfrac{dw}{d\zeta}$, $N = AE\varepsilon_\zeta = AEw'$.

Hajlítás: $\kappa_\xi = \dfrac{d\varphi_\xi}{d\zeta}$, $M_{h\xi} = I_\xi E\kappa_\xi = -I_\xi E\varphi'_\xi$,

$\kappa_\eta = -\dfrac{d\varphi_\eta}{d\zeta}$, $M_{h\eta} = I_\eta E\kappa_\eta = -I_\eta E\varphi'_\eta$.

Nyírás: $\varphi_\xi = -\dfrac{dv}{d\zeta} + \psi_\xi \Rightarrow \psi_\xi = \varphi_\xi + \dfrac{dv}{d\zeta}$, $T_\xi = GA_T\left(\varphi_\xi + v'\right)$,

$\varphi_\eta = -\dfrac{du}{d\zeta} - \psi_\eta \Rightarrow \psi_\eta = -\varphi_\eta - \dfrac{du}{d\zeta}$, $T_\eta = -GA_T\left(\varphi_\eta + u'\right)$.

Csavarás: $\vartheta = \dfrac{d\varphi_\zeta}{d\zeta}$ $M_c = I_c G\vartheta = I_c G\varphi'_\zeta$.

Itt a Π potenciális energiában az ismeretlen mezők (φ_ξ és φ_η) és az ismeretlen mezők első deriváltjai $\left(w', \varphi'_\xi, \varphi'_\eta, v', u', \varphi'_\zeta\right)$ szerepelnek.

Ezért a közelítő függvények felvételénél csak a mezők folytonosságát kell biztosítani.

4.3.2. Térbeli rúdszerkezetek, tartószerkezetek-térbeli rúdelem

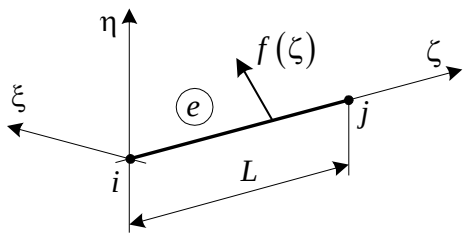
Feltételezés: a szerkezet rúdjai egymáshoz mereven kapcsolódnak.

A ξ, η, ζ az elemhez kötött lokális (helyi) koordináta-rendszer.

Az elemre ható, vonal mentén megoszló terhelés: $\vec{f}(\zeta) = f_\xi(\zeta)\vec{e}_\xi + f_\eta(\zeta)\vec{e}_\eta + f_\zeta(\zeta)\vec{e}_\zeta$.

Ismert mennyiségek:

- A rúdelem keresztmetszeti jellemzői:
  - A - a keresztmetszet területe,
  - I_c - a keresztmetszet csavarási másodrendű nyomatéka,
  - I_η - az η súlyponti főtengelyre számított másodrendű nyomaték,
  - I_ξ - az ξ súlyponti főtengelyre számított másodrendű nyomaték.
- A rúdelem anyagának rugalmassági jellemzői: E, G.
- A rúdelem hossza: L.



Az *e* rúdelem csomópontjainak jele: i, j.

A térbeli rúdelem összefüggéseit a *Bernoulli*-féle rúdelméletre alapozva építjük fel.

A rúdelem általánosított csomóponti elmozdulásvektora:

$$\underline{\underline{q}}^e = \underset{(12\times1)}{\begin{bmatrix} \underline{\underline{q}}_i^e \\ \underline{\underline{q}}_j^e \end{bmatrix}}, \qquad \text{ahol} \qquad \underline{\underline{q}}_i^e = \underset{(6\times1)}{\begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \varphi_{\xi i} \\ \varphi_{\eta i} \\ \varphi_{\zeta i} \end{bmatrix}^e}.$$

Az általánosított jelző arra utal, hogy a $\underline{\underline{q}}^e$ oszlopmátrix (az elem csomóponti általánosított elmozdulásvektora) nem csak elmozdulásokat, hanem szögelfordulásokat is tartalmaz.

Minden mennyiség csak egy változótól, a rúd középvonala mentén mért ζ koordinátától függ.

Az általánosított elmozdulásmező vektor: $$\underline{\underline{u}}^e(\zeta) = \underset{(4\times1)}{\begin{bmatrix} u^e(\zeta) \\ v^e(\zeta) \\ w^e(\zeta) \\ \varphi_\zeta^e(\zeta) \end{bmatrix}}.$$

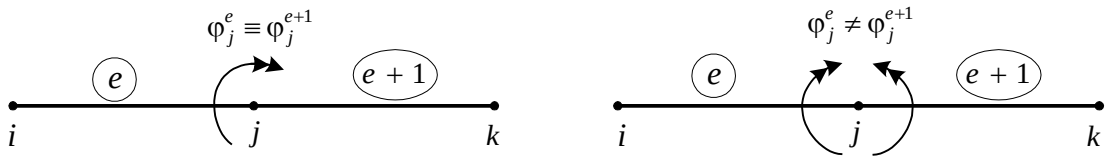
Az elmozdulásmező közelítése az e jelű elemen:

$$u^e(\zeta) = a_1^e + a_2^e\zeta + a_3^e\zeta^2 + a_4^e\zeta^3,$$
$$v^e(\zeta) = a_5^e + a_6^e\zeta + a_7^e\zeta^2 + a_8^e\zeta^3,$$
$$w^e(\zeta) = a_9^e + a_{10}^e\zeta,$$
$$\varphi_\zeta^e(\zeta) = a_{11}^e + a_{12}^e\zeta.$$

Az elemhatárokon (i, j csomópont) a $w^e(\zeta)$ és $\varphi_\zeta^e(\zeta)$ mezők esetén csak a mezők folytonosságát kell biztosítani. Az $u^e(\zeta)$ és $v^e(\zeta)$ mezők esetén azonban nemcsak az elmozdulások, hanem a szögelfordulások (az u,v lehajlás első deriváltjai) folytonosságát is biztosítani kell. Ez a konvergenciánál említett kompatibilitási feltételből következik.

Fizikai jelentés:

- Ha $\varphi_j^e = \varphi_j^{e+1}$, akkor az e és $e+1$ rúdelem egymáshoz mereven kapcsolódik.
- Ha $\varphi_j^e \neq \varphi_j^{e+1}$, akkor az e és $e+1$ rúdelem egymáshoz csuklóval kapcsolódik.



A ξ és η tengely körüli szögelfordulásmezők nem függetlenek az elmozdulásmezőktől:

$$\varphi_\xi^e(\zeta) = -\frac{dv^e(\zeta)}{d\zeta} = -a_6^e - 2a_7^e\zeta - 3a_8^e\zeta^2, \qquad \varphi_\eta^e(\zeta) = \frac{du^e(\zeta)}{d\zeta} = a_2^e + 2a_3^e\zeta + 3a_4^e\zeta^2.$$

A közelítő polinomok együtthatóit kifejezzük az elem általánosított csomóponti elmozdulásaival:

Az i jelű csomópontban:

$$u^e(\zeta_i) = u^e(\zeta = 0) = a_1^e = u_i^e,$$
$$v^e(\zeta_i) = v^e(\zeta = 0) = a_5^e = v_i^e,$$
$$w^e(\zeta_i) = w^e(\zeta = 0) = a_9^e = w_i^e,$$
$$\varphi_\xi^e(\zeta_i) = -\left.\frac{dv^e}{d\zeta}\right|_{\zeta=0} = -a_6^e = \varphi_{\xi i}^e,$$
$$\varphi_\eta^e(\zeta_i) = \left.\frac{du^e}{d\zeta}\right|_{\zeta=0} = a_2^e = \varphi_{\eta i}^e,$$
$$\varphi_\zeta^e(\zeta_i) = \varphi_\zeta^e(\zeta = 0) = a_{11}^e = \varphi_{\zeta i}^e.$$

A j jelű csomópontban:

$$u^e\left(\zeta_j\right)=u^e\left(\zeta=L\right)=a_1^e+a_2^eL+a_3^eL^2+a_4^eL^3=u_j^e,$$
$$v^e\left(\zeta_j\right)=v^e\left(\zeta=L\right)=a_5^e+a_6^eL+a_7^eL^2+a_8^eL^3=v_j^e,$$
$$w^e\left(\zeta_j\right)=w^e\left(\zeta=L\right)=a_9^e+a_{10}^eL=w_j^e,$$
$$\varphi_\xi^e\left(\zeta_j\right)=-\left.\frac{dv^e}{d\zeta}\right|_{\zeta=L}=-a_6^e-2a_7^eL-3a_8^eL^2=\varphi_{\xi j}^e,$$
$$\varphi_\eta^e\left(\zeta_j\right)=\left.\frac{du^e}{d\zeta}\right|_{\zeta=L}=a_2^e+2a_3^eL+3a_4^eL^2=\varphi_{\eta j}^e,$$
$$\varphi_\zeta^e\left(\zeta_j\right)=\varphi_\zeta^e\left(\zeta=L\right)=a_{11}^e+a_{12}^eL=\varphi_{\zeta j}^e.$$

A fenti $6+6=12$ egyenlet inhomogén lineáris algebrai egyenletrendszert alkot az a_1^e, a_2^e, … a_{12}^e ismeretlenekre.

A lineáris algebrai egyenletrendszert megoldva, a megoldást az elmozdulásmezőbe behelyettesítve és a kapott összefüggést átrendezve:

$$u^e\left(\zeta\right)=A_1^e\left(\zeta\right)u_i^e-A_2^e\left(\zeta\right)\varphi_{\eta i}^e+A_3^e\left(\zeta\right)u_j^e-A_4^e\left(\zeta\right)\varphi_{\eta j}^e,$$
$$v^e\left(\zeta\right)=A_1^e\left(\zeta\right)v_i^e+A_2^e\left(\zeta\right)\varphi_{\xi i}^e+A_3^e\left(\zeta\right)v_j^e+A_4^e\left(\zeta\right)\varphi_{\xi j}^e,$$
$$w^e\left(\zeta\right)=A_5^e\left(\zeta\right)w_i^e+A_6^e\left(\zeta\right)w_j^e,$$
$$\varphi_\zeta^e\left(\zeta\right)=A_5^e\left(\zeta\right)\varphi_{\zeta i}^e+A_6^e\left(\zeta\right)\varphi_{\zeta j}^e.$$

Az összefüggésben szereplő $A_i^e\left(\zeta\right)$ approximációs függvények:

$$A_1^e\left(\zeta\right)=1-3\left(\frac{\zeta}{L}\right)^2+2\left(\frac{\zeta}{L}\right)^3,\qquad A_2^e\left(\zeta\right)=L\left[-\frac{\zeta}{L}+2\left(\frac{\zeta}{L}\right)^2-\left(\frac{\zeta}{L}\right)^3\right],$$
$$A_3^e\left(\zeta\right)=3\left(\frac{\zeta}{L}\right)^2-2\left(\frac{\zeta}{L}\right)^3,\qquad A_4^e\left(\zeta\right)=L\left[+\left(\frac{\zeta}{L}\right)^2-\left(\frac{\zeta}{L}\right)^3\right],$$
$$A_5^e\left(\zeta\right)=1-\frac{\zeta}{L},\qquad A_6^e\left(\zeta\right)=\frac{\zeta}{L}.$$

Az elmozdulásmező közelítése mátrix alakban:

$$\underbrace{\begin{bmatrix}u^e\left(\zeta\right)\\ v^e\left(\zeta\right)\\ w^e\left(\zeta\right)\\ \varphi_\zeta^e\left(\zeta\right)\end{bmatrix}}_{(4\times1)}=\underbrace{\begin{bmatrix}A_1&0&0&0&-A_2&0&A_3&0&0&0&-A_4&0\\ 0&A_1&0&A_2&0&0&0&A_3&0&A_4&0&0\\ 0&0&A_5&0&0&0&0&0&A_6&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&A_5&0&0&0&0&0&A_6\end{bmatrix}^e}_{\underline{\underline{A}}^e\left(\zeta\right)\ (4\times12)}\underbrace{\begin{bmatrix}u_1\\ v_1\\ w_1\\ \varphi_{\xi1}\\ \varphi_{\eta1}\\ \varphi_{\zeta1}\\ u_2\\ v_2\\ \vdots\\ \vdots\\ \vdots\\ \varphi_{\zeta6}\end{bmatrix}^e}_{(12\times1)}.$$

Az előző mátrix egyenlet tömören felírva: $\underline{\underline{u}}^e\left(\zeta\right)=\underline{\underline{A}}^e\left(\zeta\right)\underline{\underline{q}}^e$.

Az $A_i^e\left(\zeta\right)$ approximációs függvények tulajdonságait később részletesen megvizsgáljuk.

Az elem alakváltozási vektora: $$\underline{\underline{\varepsilon}}^e(\zeta)=\underbrace{\begin{bmatrix}\kappa_\eta(\zeta)\\ \kappa_\xi(\zeta)\\ \varepsilon_\zeta(\zeta)\\ \vartheta(\zeta)\end{bmatrix}^e}_{(4\times1)}=\underbrace{\begin{bmatrix}-\dfrac{d^2}{d\zeta^2} & 0 & 0 & 0\\ 0 & -\dfrac{d^2}{d\zeta^2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{d}{d\zeta} & 0\\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{d}{d\zeta}\end{bmatrix}^e}_{\underline{\underline{D}}^e_\varepsilon\ (4\times4)}\underbrace{\begin{bmatrix}u(\zeta)\\ v(\zeta)\\ w(\zeta)\\ \varphi_\zeta(\zeta)\end{bmatrix}^e}_{(4\times1)},$$

Tömören írva: $$\underset{(4\times1)}{\underline{\underline{\varepsilon}}^e(\zeta)}=\underset{(4\times4)}{\underline{\underline{D}}^e_\varepsilon}\,\underset{(4\times1)}{\underline{\underline{u}}^e(\zeta)}=\underset{(4\times4)}{\underline{\underline{D}}^e_\varepsilon}\,\underset{(4\times12)}{\underline{\underline{A}}^e(\zeta)}\,\underset{(12\times1)}{\underline{\underline{q}}^e}=\underset{(4\times12)}{\underline{\underline{B}}^e(\zeta)}\,\underset{(12\times1)}{\underline{\underline{q}}^e}\ .$$

Az elem általánosított belső erő - belső nyomaték vektora:

$$\underline{\underline{\sigma}}^e(\zeta)=\begin{bmatrix}M_{h\eta}\\ M_{h\xi}\\ N\\ M_c\end{bmatrix}^e=\underbrace{\begin{bmatrix}I_\eta E & 0 & 0 & 0\\ 0 & I_\xi E & 0 & 0\\ 0 & 0 & AE & 0\\ 0 & 0 & 0 & I_c G\end{bmatrix}^e}_{\underline{\underline{C}}^e\ (4\times4)}\begin{bmatrix}\kappa_\eta\\ \kappa_\xi\\ \varepsilon_\zeta\\ \vartheta\end{bmatrix}^e=\underline{\underline{C}}^e\underline{\underline{\varepsilon}}^e$$

Tömören írva: $$\underline{\underline{\sigma}}^e(\zeta)=\underline{\underline{C}}^e\underline{\underline{B}}^e(\zeta)\underline{\underline{q}}^e.$$

Rúdszerkezeteknél az anyagállandók mátrixa nem csak anyagállandókat, hanem keresztmetszeti jellemzőket is tartalmaz.

Az elem merevségi mátrixa helyi KR-ben: $$\underline{\underline{K}}^e=\underbrace{\int_{(L)}\left[\underline{\underline{A}}^e(\zeta)\right]^T\left(\underline{\underline{D}}^e_\varepsilon\right)^T\underline{\underline{C}}^e\underline{\underline{D}}^e_\varepsilon\underline{\underline{A}}^e(\zeta)\,d\zeta}_{(12\times12)}\ .$$

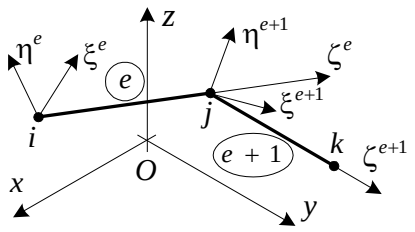
Az elem megoszló terhelésből származó általánosított csomóponti terhelésvektora:

$$\underset{(12\times1)}{\underline{\underline{f}}^e_v}=\int_{(L)}\underset{(12\times4)}{\left[\underline{\underline{A}}^e(\zeta)\right]^T}\underset{(4\times1)}{\begin{bmatrix}f_\xi(\zeta)\\ f_\eta(\zeta)\\ f_\zeta(\zeta)\\ 0\end{bmatrix}}d\zeta,\qquad \underline{\underline{f}}^e_v=\begin{bmatrix}\underline{\underline{f}}^e_{vi}\\ \underline{\underline{f}}^e_{vj}\end{bmatrix}.$$

A megoszló terhelés a csomópontokban mindig erőkkel helyettesíthető (a helyettesítő nyomatékok nullák):

$$\underline{\underline{f}}^e_{vi}=\begin{bmatrix}F_{\xi i}\\ F_{\eta i}\\ F_{\zeta i}\\ M_{\xi i}=0\\ M_{\eta i}=0\\ M_{\zeta i}=0\end{bmatrix}^e_{vi}.$$

A rúdelemek merev összekapcsolása:



Probléma: a helyi KR-ben felépített rúdelemek nem kapcsolhatók össze.

Megoldás: az összekapcsoláshoz a rúdelem végeselem jellemzőit (az általánosított csomóponti elmozdulásvektort) egy (közös) vonatkoztatási *x,y,z* KR-ben kell előállítani.

A rúdelem helyi KR-ben vett végeselem jellemzőit transzformálni kell a vonatkoztatási koordináta-rendszerbe. A transzformációt és a peremfeltételek figyelembevételét síkbeli esetre nézzük meg részletesen.

4.3.3. Síkbeli rúdszerkezetek, tartószerkezetek - síkbeli rúdelem

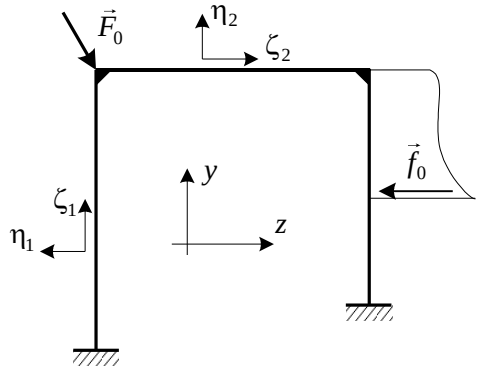
Tartószerkezet $\equiv$ rúdszerkezet.

Feltételezés: A szerkezetet alkotó rudak egymáshoz mereven kapcsolódnak.

A vonatkoztatási (globális) rendszer legyen az x,y,z KR. A helyi (lokális) koordinátarendszerek: $\xi_1\eta_1\zeta_1$, $\xi_2\eta_2\zeta_2$, $\dots$.

További feltételezések:

- A rudak középvonalai egy síkba esnek.
- A szerkezet terhelése a középvonalak síkjában ható erőrendszer.
- Az $x \equiv \xi_i$ tengely a rúdkeresztmetszetek tehetetlenségi főtengelye. Ezért a szerkezet rúdjai egyenesen hajlítottak.



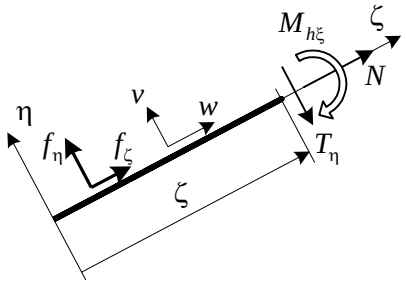
A rúd mechanikai modellje:

- A testet (a valóságos rudat) középvonalával helyettesítjük.
- A rúd szilárdságtani viselkedését jellemző mennyiségeket a középvonalhoz kötjük.

Ragadjunk ki a szerkezetből egy rúdszakaszt, és vezessük be a következő jelöléseket:

$v(\zeta)$, $w(\zeta)$ - a középvonal pontjainak elmozdulása,

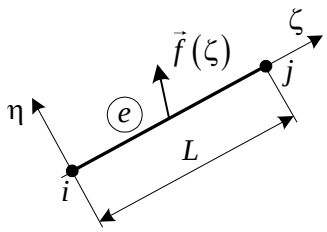
$N = N(\zeta)$, $T_\eta = T(\zeta)$, $M_{h\xi} = M_h(\zeta)$ - a belső erők (igénybevételek).



Ismert a rúdra ható vonal mentén megoszló erőrendszer: $\vec{f}(\zeta) = f_\eta(\zeta)\vec{e}_\eta + f_\zeta(\zeta)\vec{e}_\zeta$.

Ismertek továbbá a keresztmetszeti jellemzők: a keresztmetszet A területe és I_ξ másodrendű nyomatéka, a rúd anyagának E rugalmassági modulusa, valamint a rúd L hossza.

A *síkbeli rúdelemet* jellemző mennyiségeket a *Bernoulli*-féle rúdelméletre alapozva építjük fel.



Minden mennyiség csak egy változótól, a rúd középvonala mentén mért ζ koordinátától függ:

Az elmozdulásmező: $\underline{\underline{u}}^e(\zeta) = \begin{bmatrix} v^e(\zeta) \\ w^e(\zeta) \end{bmatrix}$,

ahol $v^e(\zeta)$ a lehajlás (η irányú elmozdulás), $w^e(\zeta)$ pedig a rúd pontjainak középvonal irányú (axiális irányú, rúdirányú) elmozdulása.

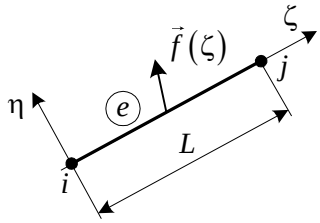
Az elmozdulásmezőt a helyi KR-ben közelítjük:

$$v^e(\zeta) = a_1^e + a_2^e\zeta + a_3^e\zeta^2 + a_4^e\zeta^3,$$
$$w^e(\zeta) = a_5^e + a_6^e\zeta.$$

Csomópontok jele: i, j.

Általánosított csomóponti elmozdulásvektor (csomóponti paraméterek):

$$\underline{\underline{q}}^e = \underset{(6\times1)}{\begin{bmatrix} \underline{\underline{q}}_i^e \\ \underline{\underline{q}}_j^e \end{bmatrix}} \qquad \underline{\underline{q}}_i^e = \underbrace{\begin{bmatrix} v_i \\ w_i \\ \varphi_i \end{bmatrix}^e}_{(3\times1)}$$



A polinomok együtthatóinak kifejezése a csomóponti paraméterekkel:

$$v^e(\zeta_i) = v^e(\zeta = 0) = a_1^e = v_i^e,$$
$$w^e(\zeta_i) = v^e(\zeta = 0) = a_5^e = w_i^e,$$
$$\varphi^e(\zeta_i) = -\left.\frac{dv^e}{d\zeta}\right|_{\zeta=0} = -a_2^e = \varphi_i^e,$$
$$v^e(\zeta_j) = v^e(\zeta = L) = a_1^e + a_2^e L + a_3^e L^2 + a_4^e L^3 = v_j^e,$$
$$w^e(\zeta_j) = w^e(\zeta = L) = a_5^e + a_6^e L = w_j^e,$$
$$\varphi^e(\zeta_i) = -\left.\frac{dv^e}{d\zeta}\right|_{\zeta=L} = -a_2^e - 2a_3^e L - 3a_4^e L^2 = \varphi_j^e.$$

A lineáris algebrai egyenletrendszert megoldva, a megoldást az elmozdulásmezőbe behelyettesítve és a kapott összefüggést átrendezve:

$$v^e(\zeta) = A_1^e(\zeta)v_i^e + A_2^e(\zeta)\varphi_i^e + A_3^e(\zeta)v_j^e + A_4^e(\zeta)\varphi_j^e,$$
$$w^e(\zeta) = A_5^e(\zeta)w_i^e + A_6^e(\zeta)w_j^e.$$

Az elmozdulásmezőre felírt egyenletet mátrix alakban is megadhatjuk:

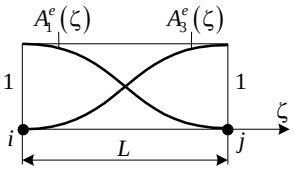
$$\underbrace{\begin{bmatrix} v^e(\zeta) \\ w^e(\zeta) \end{bmatrix}}_{(2\times1)} = \underbrace{\begin{bmatrix} A_1^e(\zeta) & 0 & A_2^e(\zeta) & A_3^e(\zeta) & 0 & A_4^e(\zeta) \\ 0 & A_5^e(\zeta) & 0 & 0 & A_6^e(\zeta) & 0 \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{A}}^e(\zeta)\ (2\times6)} \underbrace{\begin{bmatrix} v_i^e \\ w_i^e \\ \varphi_i^e \\ v_j^e \\ w_j^e \\ \varphi_j^e \end{bmatrix}}_{(6\times1)}.$$

Tömören írva: $\underline{\underline{u}}^e(\zeta) = \underline{\underline{A}}^e(\zeta)\underline{\underline{q}}^e$.

Az összefüggésben szereplő approximációs függvények:

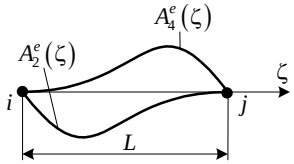
$$A_1^e(\zeta) = 1 - 3\left(\frac{\zeta}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{\zeta}{L}\right)^3,$$

$$A_3^e(\zeta) = 3\left(\frac{\zeta}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{\zeta}{L}\right)^3,$$



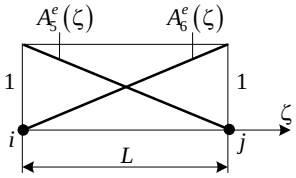
$$A_2^e(\zeta) = L\left[-\frac{\zeta}{L} + 2\left(\frac{\zeta}{L}\right)^2 - \left(\frac{\zeta}{L}\right)^3\right],$$

$$A_4^e(\zeta) = L\left[+\left(\frac{\zeta}{L}\right)^2 - \left(\frac{\zeta}{L}\right)^3\right],$$



$$A_5^e(\zeta) = 1 - \frac{\zeta}{L},$$

$$A_6^e(\zeta) = \frac{\zeta}{L}.$$



Az e elem alakváltozási vektora: $\underset{(2\times1)}{\begin{bmatrix} \kappa_\xi^e(\zeta) \\ \varepsilon_\zeta^e(\zeta) \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} -\dfrac{d^2 v^e}{d\zeta^2} \\ \dfrac{dw^e}{d\zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{d^2}{d\zeta^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{d}{d\zeta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^e(\zeta) \\ w^e(\zeta) \end{bmatrix}$

$$\underset{(2\times1)}{\begin{bmatrix} \kappa_\xi^e(\zeta) \\ \varepsilon_\zeta^e(\zeta) \end{bmatrix}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\dfrac{d^2 A_1^e}{d\zeta^2} & 0 & -\dfrac{d^2 A_2^e}{d\zeta^2} & -\dfrac{d^2 A_3^e}{d\zeta^2} & 0 & -\dfrac{d^2 A_4^e}{d\zeta^2} \\ 0 & \dfrac{dA_5^e}{d\zeta} & 0 & 0 & \dfrac{dA_6^e}{d\zeta} & 0 \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{B}}^e(\zeta)\ (2\times6)} \underset{(6\times1)}{\begin{bmatrix} v_i^e \\ w_i^e \\ \varphi_i^e \\ v_j^e \\ w_j^e \\ \varphi_j^e \end{bmatrix}}.$$

Tömören írva: $\underset{(2\times1)}{\underline{\underline{\varepsilon}}^e(\zeta)} = \underset{(2\times2)}{\underline{\underline{D}}_\varepsilon^e}\ \underset{(2\times6)}{\underline{\underline{A}}^e(\zeta)}\ \underset{(6\times1)}{\underline{\underline{q}}^e} = \underset{(2\times6)}{\underline{\underline{B}}^e(\zeta)}\ \underset{(6\times1)}{\underline{\underline{q}}^e}$.

Az elem általánosított belső erő (belső erő/ nyomaték) vektora:

$$\begin{bmatrix} M_h(\zeta) \\ N(\zeta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -I_\xi E v'' \\ AEw' \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} I_\xi E & 0 \\ 0 & AE \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{C}}^e} \begin{bmatrix} \kappa_\xi^e(\zeta) \\ \varepsilon_\zeta^e(\zeta) \end{bmatrix}.$$

Tömören írva: $\underset{(2\times1)}{\underline{\underline{\sigma}}^e(\zeta)} = \underset{(2\times2)}{\underline{\underline{C}}^e}\,\underset{(2\times6)}{\underline{\underline{B}}^e(\zeta)}\,\underset{(6\times1)}{\underline{\underline{q}}^e}$.

Az elem merevségi mátrixa a helyi ζ,η KR-ben: $\underline{\underline{K}}^e = \int\limits_{(L)} \underset{(6\times2)}{\left[\underline{\underline{B}}^e(\zeta)\right]^T}\,\underset{(2\times2)}{\underline{\underline{C}}^e}\,\underset{(2\times6)}{\underline{\underline{B}}^e(\zeta)}\,d\zeta.$

$$\underline{\underline{K}}^e = \frac{I_\xi E}{L^3}\begin{bmatrix} 12 & 0 & -6L & -12 & 0 & -6L \\ 0 & \dfrac{AL^2}{I_\xi} & 0 & 0 & -\dfrac{AL^2}{I_\xi} & 0 \\ -6L & 0 & 4L^2 & 6L & 0 & 2L \\ -12 & 0 & 6L & 12 & 0 & -6L \\ 0 & -\dfrac{AL^2}{I_\xi} & 0 & 0 & \dfrac{AL^2}{I_\xi} & 0 \\ -6L & 0 & 2L^2 & -6L & 0 & 4L^2 \end{bmatrix}.$$

Az e jelű elem potenciális energiájának felírása során az elem merevségi mátrixát célszerű blokkokra bontani:

$$\Pi^e = \frac{1}{2}\left[\left(\underline{\underline{q}}_i^e\right)^T \quad \left(\underline{\underline{q}}_j^e\right)^T\right]\begin{bmatrix} \underline{\underline{K}}_{ii} & \underline{\underline{K}}_{ij} \\ \underline{\underline{K}}_{ji} & \underline{\underline{K}}_{jj} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \underline{\underline{q}}_i^e \\ \underline{\underline{q}}_j^e \end{bmatrix} - \left[\left(\underline{\underline{q}}_i^e\right)^T \quad \left(\underline{\underline{q}}_j^e\right)^T\right]\begin{bmatrix} \underline{\underline{f}}_i^e \\ \underline{\underline{f}}_j^e \end{bmatrix}.$$

Az elem általánosított csomóponti terhelésvektora a helyi KR-ben:

- Vonal mentén megoszló terhelésből: $\underset{(6\times1)}{\underline{\underline{f}}_v^e} = \int\limits_{(L)} \underset{(6\times2)}{\left[\underline{\underline{A}}^e(\zeta)\right]^T}\underset{(2\times1)}{\begin{bmatrix} f_\eta \\ f_\zeta \end{bmatrix}}d\zeta = \begin{bmatrix} \underline{\underline{f}}_{vi} \\ \underline{\underline{f}}_{vj} \end{bmatrix}^e$.

  A csomóponti terhelésvektor $f_\eta = c_1 = \text{áll.},\ f_\zeta = c_2 = \text{áll.},$ konstans megoszló terhelés esetén:

  $$\underset{(6\times1)}{\underline{\underline{f}}_v^e} = \int\limits_{(L)} \underset{(6\times2)}{\left[\underline{\underline{A}}^e(\zeta)\right]^T} d\zeta \underset{(2\times1)}{\begin{bmatrix} f_\eta \\ f_\zeta \end{bmatrix}}.$$

  Az approximációs mátrix integrálja: $\int\limits_{(L)} \underset{(2\times6)}{\left[\underline{\underline{A}}^e(\zeta)\right]} d\zeta = \begin{bmatrix} \dfrac{L}{2} & 0 & -\dfrac{L^2}{12} & \dfrac{L}{2} & 0 & \dfrac{L^2}{12} \\ 0 & \dfrac{L}{2} & 0 & 0 & \dfrac{L}{2} & 0 \end{bmatrix}.$

  A csomóponti terhelésvektor: $\underset{(6\times1)}{\underline{\underline{f}}_v^e} = \int\limits_{(L)} \underset{(6\times2)}{\left[\underline{\underline{A}}^e(\zeta)\right]^T} d\zeta \underset{(2\times1)}{\begin{bmatrix} f_\eta \\ f_\zeta \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} \dfrac{L}{2} & 0 \\ 0 & \dfrac{L}{2} \\ -\dfrac{L^2}{12} & 0 \\ \dfrac{L}{2} & 0 \\ 0 & \dfrac{L}{2} \\ \dfrac{L^2}{12} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f_\eta \\ f_\zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{L\,f_\eta}{2} \\ \dfrac{L\,f_\zeta}{2} \\ -\dfrac{L^2 f_\eta}{12} \\ \dfrac{L\,f_\eta}{2} \\ \dfrac{L\,f_\zeta}{2} \\ \dfrac{L^2 f_\eta}{12} \end{bmatrix}.$

- Koncentrált erőből

  A végeselem hálózatot (felosztást) mindig úgy célszerű felvenni, hogy a koncentrált terhelés támadáspontjára csomópont essen.

Ha az i csomópont a koncentrált terhelés támadáspontja: $\underline{\underline{f}}_{ki}^{e} = \begin{bmatrix} F_{\eta i} \\ F_{\zeta i} \\ M_i \end{bmatrix}^e$ $\qquad \underline{\underline{f}}_{k}^{e} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{f}}_{ki} \\ \underline{\underline{f}}_{kj} \end{bmatrix}^e$.

Az elemek jellemzői (merevségi mátrix, terhelésvektor) a helyi koordinátarendszerben általában nem kapcsolhatók össze.

Transzformáció a z,y globális/vonatkoztatási koordináta-rendszerbe:

A k jelű csomópont általánosított elmozdulásvektora a helyi/lokális ζ, η KR-ben:

$$\underline{\underline{q}}_{k}^{e} = \begin{bmatrix} v_k \\ w_k \\ \varphi_k \end{bmatrix}^e .$$

A k jelű csomópont általánosított elmozdulásvektora a z, y vonatkoztatási/globális KR-ben:

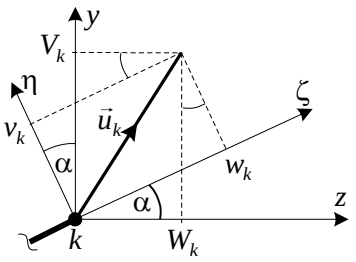
$$\underline{\underline{Q}}_{k}^{e} = \begin{bmatrix} V_k \\ W_k \\ \Phi_k \end{bmatrix}^e .$$

A transzformáció összefüggései:

$v_k = V_k \cos\alpha - W_k \sin\alpha,$

$w_k = V_k \sin\alpha + W_k \cos\alpha,$

$\varphi_k = \Phi_k.$



A transzformációs összefüggéseket mátrix alakban is felírhatjuk:

$$\begin{bmatrix} v_k \\ w_k \\ \varphi_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_k \\ W_k \\ \Phi_k \end{bmatrix}, \quad \text{vagy} \quad \underset{(3\times1)}{\underline{\underline{q}}_{k}^{e}} = \underset{(3\times3)}{\underline{\underline{T}}_{0}^{e}} \underset{(3\times1)}{\underline{\underline{Q}}_{k}^{e}} .$$

Az elem csomóponti elmozdulásvektorának transzformációja:

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{q}}_{i}^{e} \\ \underline{\underline{q}}_{j}^{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{T}}_{0}^{e} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{T}}_{0}^{e} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{Q}}_{i}^{e} \\ \underline{\underline{Q}}_{j}^{e} \end{bmatrix}, \quad \text{vagy} \quad \underset{(6\times1)}{\underline{\underline{q}}^{e}} = \underset{(6\times6)}{\underline{\underline{T}}^{e}} \underset{(6\times1)}{\underline{\underline{Q}}^{e}}$$

A transzformációs összefüggést az elem potenciális energiájába behelyettesítve, az elem merevségi mátrixa a *z,y* vonatkoztatási KR-ben:

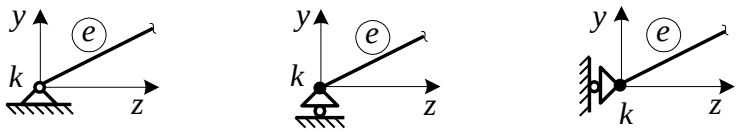
$$\underset{(6\times6)}{\underline{\underline{\hat{K}}}^{e}} = \left(\underset{(6\times6)}{\underline{\underline{T}}^{e}} \right)^T \underset{(6\times6)}{\underline{\underline{K}}^{e}} \underset{(6\times6)}{\underline{\underline{T}}^{e}} .$$

Az elem csomóponti terhelésvektora a *z,y* vonatkoztatási KR-ben: $\underset{(6\times1)}{\underline{\underline{\hat{f}}}^{e}} = \left(\underset{(6\times6)}{\underline{\underline{T}}^{e}} \right)^T \underset{(6\times1)}{\underline{\underline{f}}^{e}}$.

Az egész szerkezet merevségi mátrixának és csomóponti terhelésvektorának előállítása a korábban megismert általános algoritmus szerint történik.

A peremfeltételek figyelembevétele:

Csuklós megtámasztás: $V_k = W_k = 0$, görgős megtámasztás: $V_k = 0$, vagy $W_k = 0$.

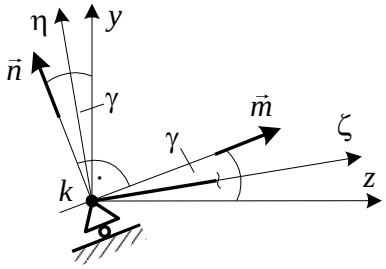


$V_k = W_k = 0$ $\qquad$ $V_k = 0$ $\qquad$ $W_k = 0$

Ferde görgő: a görgő síkja nem párhuzamos az y vagy z tengellyel.
Ferde görgő esetén a csomóponti elmozdulásvektort a görgő síkjához kötött $\vec{n}, \vec{m}$ KR-be kell transzformálni.

A k jelű csomópont elmozdulásvektora a z, y KR-ben: $\underline{\underline{Q}}_k^e = \begin{bmatrix} V_k \\ W_k \\ \Phi_k \end{bmatrix}^e$

A k jelű csomópont elmozdulásvektora a görgő síkjához kötött $(\vec{m}, \vec{n})$ KR-ben: $\underline{\underline{\tilde{q}}}_k^e = \begin{bmatrix} \tilde{v}_k \\ \tilde{w}_k \\ \tilde{\varphi}_k \end{bmatrix}^e$.



Transzformáció a globális (z, y) és a görgő $(\vec{m}, \vec{n})$ koordinátarendszere között:

$$\begin{bmatrix} V_k \\ W_k \\ \Phi_k \end{bmatrix}^e = \begin{bmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma & 0 \\ -\sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^e \begin{bmatrix} \tilde{v}_k \\ \tilde{w}_k \\ \tilde{\varphi}_k \end{bmatrix}^e, \quad \text{vagy} \quad \underline{\underline{Q}}_k^e = \underline{\underline{\tilde{T}}}_k^e \underline{\underline{\tilde{q}}}_k^e.$$

A transzformációt a k jelű csomópontba befutó minden e jelű elem k csomóponti elmozdulásvektorára el kell végezni:

$$\underline{\underline{Q}}^e = \begin{bmatrix} \underline{\underline{Q}}_k \\ \underline{\underline{Q}}_j \end{bmatrix}^e = \begin{bmatrix} \underline{\underline{\tilde{T}}}_k^e & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{E}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{\tilde{q}}}_k \\ \underline{\underline{\tilde{q}}}_j \end{bmatrix}^e, \quad \text{vagy} \quad \underline{\underline{Q}}^e = \underline{\underline{\tilde{T}}}^e \underline{\underline{\tilde{q}}}^e.$$

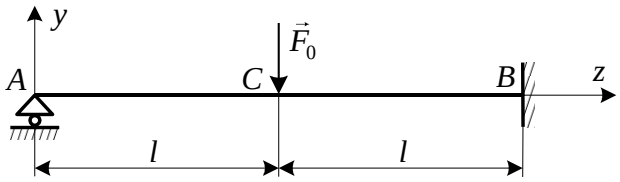
Ha az e elem j csomópontjában is ferde görgő van, akkor az $\underline{\underline{E}}$ egységmátrix helyett a $\underline{\underline{\tilde{T}}}_j^e$ transzformációs blokkot kell beírni.

Az elem ferde görgő figyelembevételéhez módosított jellemzői:

$$\underline{\underline{\tilde{K}}}^e = \left(\underline{\underline{\tilde{T}}}^e\right)^T \underline{\underline{\hat{K}}}^e \underline{\underline{T}}^e, \qquad \underline{\underline{\tilde{F}}}^e = \left(\underline{\underline{\tilde{T}}}^e\right)^T \underline{\underline{\hat{f}}}^e.$$

Példa: statikailag határozatlan tartószerkezet alakváltozása

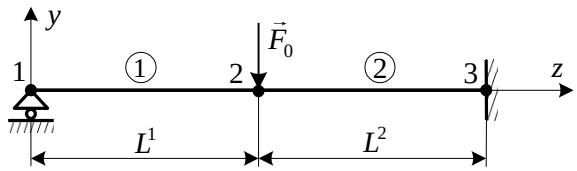
A végeselem módszernél a statikai határozottság, határozatlanság kérdésével nem kell foglalkozni. Ez a megállapítás nem csak rúdszerkezetekre, hanem minden más szerkezetre is érvényes.



Adott: az ábrán látható tartó méretei (geometriája) és anyaga: $l,\ E,\ I_x, F_0$.

Feladat: A C keresztmetszet v_C lehajlásának és φ_C szögelfordulásának meghatározása végeselem módszerrel.

Kidolgozás:
Végeselem felosztás: vegyünk fel két rúdelemet.
- A csomópontok sorszáma (jele): $1, 2, 3$.
- Az elemek jelét (sorszámozását) bekarikázással különböztetjük meg.
- A rúdelemek hossza: $L^1 = L^2 = l$.
- Koordinátarendszerek: $\zeta_1, \eta_1 = \zeta_2, \eta_2 = z, y \Rightarrow$ Nincs szükség koordináta transzformációra.
- Nincs z irányú terhelés, ezért $w(\zeta) \equiv 0$. A rúd középvonalának pontjai nem mozdulnak el z irányban, a szerkezetben nem lép fel rúderő.



Csomóponti elmozdulásvektor: $\underline{\underline{q}}_i = \begin{bmatrix} v_i \\ \varphi_i \end{bmatrix} \quad (i = 1, 2, 3)$.

Az elemek merevségi mátrixai: $\underline{\underline{K}}^1 = \underline{\underline{K}}^2 = \dfrac{I_x E}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & -6l & -12 & -6l \\ -6l & 4l^2 & 6l & 2l^2 \\ -12 & 6l & 12 & -6l \\ -6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{K}}_{11} & \underline{\underline{K}}_{12} \\ \underline{\underline{K}}_{21} & \underline{\underline{K}}_{22} \end{bmatrix}^e$.

A megoldandó lineáris algebrai egyenletrendszer:

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{K}}^1_{11} & \underline{\underline{K}}^1_{12} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{K}}^1_{21} & \left(\underline{\underline{K}}^1_{22} + \underline{\underline{K}}^2_{22}\right) & \underline{\underline{K}}^2_{23} \\ \underline{0} & \underline{\underline{K}}^2_{32} & \underline{\underline{K}}^2_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{q}}_1 \\ \underline{\underline{q}}_2 \\ \underline{\underline{q}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{f}}^1_1 \\ \underline{\underline{f}}^1_2 + \underline{\underline{f}}^2_2 \\ \underline{\underline{f}}^2_3 \end{bmatrix}.$$

Részletesen leírva:

$$\frac{I_x E}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & -6l & -12 & -6l & 0 & 0 \\ -6l & 4l^2 & 6l & 2l^2 & 0 & 0 \\ 12 & 6l & 24 & -12l & -12 & -6l \\ -6l & 2l^2 & -12l & 8l^2 & 6l & 2l^2 \\ 0 & 0 & -12 & 6l & 12 & -6l \\ 0 & 0 & -6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \varphi_1 \\ v_2 \\ \varphi_2 \\ v_3 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{1y} \\ 0 \\ F_0 \\ 0 \\ F_{3y} \\ M_3 \end{bmatrix}.$$

A támasztó erőrendszer koordinátái: $F_{1y,}, F_{3y}, M_3$ (ismeretlenek).

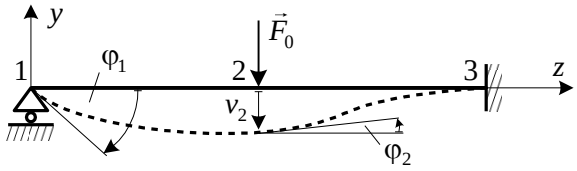
Peremfeltételek: $v_1 = v_3 = \varphi_3 = 0$.
A peremfeltételeket úgy vesszük figyelembe, hogy az egyenletrendszerből töröljük az 1., 5. és 6. sorokat és oszlopokat:
Az egyenletrendszer a peremfeltételek figyelembe vétele után:

$$\frac{I_x E}{l^3} \begin{bmatrix} 4l^2 & 6l & 2l^2 \\ 6l & 24 & -12l \\ 2l^2 & -12l & 8l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ v_2 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -F_0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Az egyenletrendszer megoldása:

$$\varphi_1 = \frac{1}{8} \frac{l^2}{I_x E} F_0 \circlearrowleft, \qquad v_2 = -\frac{7}{96} \frac{l^3}{I_x E} F_o \downarrow, \qquad \varphi_2 = -\frac{1}{32} \frac{l^2}{I_x E} F_0 \circlearrowright.$$

A kapott megoldás egzakt!



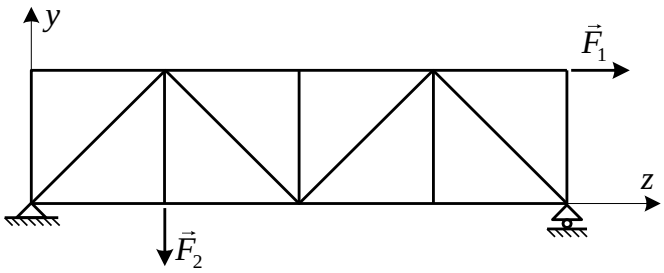
A szilárdságtanból ismert, hogy koncentrált terhelésű tartószerkezetben szakaszonként állandó N normál- és T_y nyíró-, valamint szakaszonként lineárisan változó M_{hx} hajlítónyomatéki igénybevétel lép fel.

A végeselem közelítéssel meghatározott mennyiségek esetében:

- $w(\zeta)$ lineáris közelítése miatt N elemenként állandó,
- $v(\zeta)$ harmadfokú közelítése miatt $M_{hx} = -I_x E v''$ elemenként lineáris.
- $v(\zeta)$ harmadfokú közelítése miatt $T_y = -\dfrac{dM_{hx}}{d\zeta} = -I_x E v'''$ elemenként állandó.

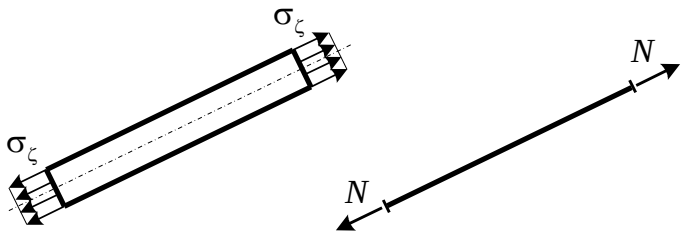
A végeselem közelítés tehát tartalmazza az egzakt megoldást. $\Rightarrow$ A Π energia minimuma elvből megkapjuk az egzakt megoldást!

4.3.4. Síkbeli rácsos tartószerkezetek



Feltételezések:
- A rudak középvonala egy síkba esik.
- A rudak egyenes középvonalúak és a végpontjaikban csuklókkal kapcsolódnak egymáshoz.
- Külső terhelés csak a csuklópontokban, vagy a rudakra a középvonallal megegyező irányban működik.

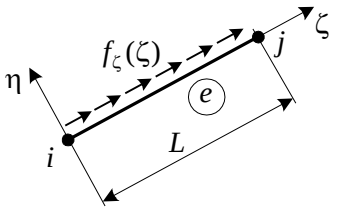
Következmény: a szerkezetet alkotó rudakban csak rúderő ébred.



A keresztmetszet alakjára nincs semmilyen korlátozás.

Húzott, nyomott rúdelem:

Ismert: - a rúdelem axiális terhelése $\vec{f}(\zeta) = f_\zeta(\zeta)\vec{e}_\zeta$,
- a rúdelem keresztmetszetének A területe,
- a rúdelem anyagának E rugalmassági modulusa,
- a rúdelem L hossza.



Ebben az esetben csak a rúdirányú $w(\zeta)$ elmozdulásmezőt kell közelíteni: $w(\zeta) = a_1^e + a_2^e \zeta$.

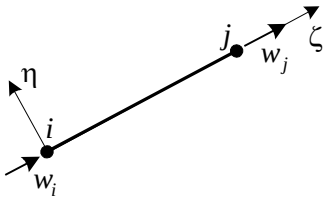
A csomópontok jele: i, j.

Az elem csomóponti elmozdulásvektora: $\underline{\underline{q}}^e = \underset{(2\times1)}{\begin{bmatrix} w_i \\ w_j \end{bmatrix}^e}$.

A polinom együtthatóinak kifejezése a csomóponti paraméterekkel:

$w^e(\zeta_i) = w^e(\zeta = 0) = w_i^e = a_1^e$,

$w^e(\zeta_j) = w^e(\zeta = L) = w_j^e = a_1^e + a_2^e L$.



Az egyenletrendszer megoldása: $a_1^e = w_i^e$, $a_2^e = \dfrac{w_j^e - w_i^e}{L}$.

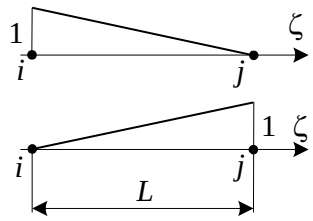
Az elmozdulásmező a csomóponti elmozdulásokkal kifejezve: $w^e(\zeta) = w_i^e + \dfrac{w_j^e - w_i^e}{L}\zeta$.

Mátrix alakban írva: $w^e(\zeta) = \begin{bmatrix} \left(1 - \dfrac{\zeta}{L}\right) & \dfrac{\zeta}{L} \end{bmatrix}^e \begin{bmatrix} w_i^e \\ w_j^e \end{bmatrix} = \underline{\underline{A}}^e(\zeta)\underline{\underline{q}}^e$.

Az approximációs függvények (alakfüggvények):

$A_i^e(\zeta) = 1 - \dfrac{\zeta}{L}$,

$A_j^e(\zeta) = \dfrac{\zeta}{L}$.



Az alakváltozási vektor - a rúdirányú fajlagos nyúlás (1 db skalár mennyiség):

$$\underset{(1\times1)}{\varepsilon_\zeta^e} = \frac{dw^e}{d\zeta} = \frac{w_j^e - w_i^e}{L} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\dfrac{1}{L} & \dfrac{1}{L} \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{B}}^e(\zeta)(1\times2)} \underset{(2\times1)}{\begin{bmatrix} w_i^e \\ w_j^e \end{bmatrix}} = \underline{\underline{B}}^e(\zeta)\underline{\underline{q}}^e.$$

A feszültségi vektor - a rúdirányú normálfeszültség (1 db skalár mennyiség):

$$\underset{(1\times1)}{\sigma_\zeta^e} = E\varepsilon_\zeta^e = \underset{(1\times1)}{E}\,\underset{(1\times2)}{\underline{\underline{B}}^e(\zeta)}\,\underset{(2\times1)}{\underline{\underline{q}}^e}, \qquad N^e = A\sigma_\zeta^e.$$

Az elem merevségi mátrixa a helyi KR-ben:

$$\underline{\underline{K}}^e = \int_{(V^e)} \left[\underline{\underline{B}}^e(\zeta)\right]^T \underline{\underline{C}}^e \underline{\underline{B}}^e(\zeta)\,d\zeta = E\left(\underline{\underline{B}}^e\right)^T \underline{\underline{B}}^e \int_{(V^e)} A\,d\zeta.$$

dV

A szorzást és az integrálást elvégezve: $\underline{\underline{K}}^e = \dfrac{E^e A^e}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{ii} & K_{ij} \\ K_{ji} & K_{jj} \end{bmatrix}^e$.

Az elem csomóponti terhelésvektora a helyi KR-ben:

- Vonal mentén megoszló terhelésből: $\underline{\underline{f}}_v^e = \int_{(L)} \left[\underset{(2\times1)}{\underline{\underline{A}}^e(\zeta)}\right]^T \underset{(1\times1)}{f_\zeta(\zeta)}\,d\zeta.$

Ha $f_\zeta = \text{áll.}$: $\underline{\underline{f}}_v^e = f_\zeta \int_{(L)} \begin{bmatrix} 1 - \dfrac{\zeta}{L} \\ \dfrac{\zeta}{L} \end{bmatrix} d\zeta = f_\zeta \begin{bmatrix} \left(\zeta - \dfrac{\zeta^2}{2L}\right) \\ \left(\dfrac{\zeta^2}{2L}\right) \end{bmatrix}_{\zeta=0}^{L} = \dfrac{f_\zeta L}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$

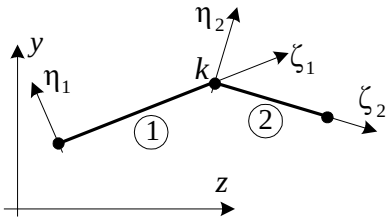
- Koncentrált erőből: $\underline{\underline{f}}_k^e = \begin{bmatrix} F_{i\zeta} \\ F_{j\zeta} \end{bmatrix}$.

Az elem potenciális energiája:

$$\Pi^e = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \left(\underline{\underline{q}}_i^e\right)^T & \left(\underline{\underline{q}}_j^e\right)^T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} K_{ii} & K_{ij} \\ K_{ji} & K_{jj} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \underline{\underline{q}}_i^e \\ \underline{\underline{q}}_j^e \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \left(\underline{\underline{q}}_i^e\right)^T & \left(\underline{\underline{q}}_j^e\right)^T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \underline{\underline{f}}_i^e \\ \underline{\underline{f}}_j^e \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} w_i^e & w_j^e \end{bmatrix}\frac{AE}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w_i^e \\ w_j^e \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} w_i^e & w_j^e \end{bmatrix}\left\{\frac{f_\zeta L}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_{i\zeta} \\ F_{j\zeta} \end{bmatrix}\right\}.$$

A rúdelemek összeillesztése:



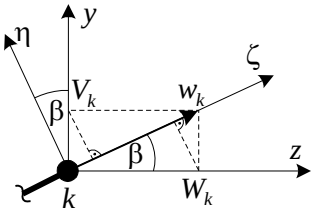
Az elemeket jellemző merevségi mátrixok és csomóponti terhelésvektorok a helyi koordinátarendszerek különbözősége miatt a k csomópontban nem kapcsolhatók össze.

$$\underline{\underline{q}}_k^1 = \left[w_k^1\right] \neq \underline{\underline{q}}_k^2 = \left[w_k^2\right].$$

Transzformáció a z, y globális koordinátarendszerbe:

$\underline{\underline{q}}_k = \left[w_k\right]$, $\quad \underline{\underline{Q}}_k = \begin{bmatrix} V_k \\ W_k \end{bmatrix}$.

$w_k = V_k \sin\beta + W_k \cos\beta$.



Transzformációs összefüggés az e jelű elemre mátrix alakban:

$$\underline{\underline{q}}^e = \underset{(2\times1)}{\begin{bmatrix} w_i \\ w_j \end{bmatrix}^e} = \underset{(2\times4)}{\begin{bmatrix} \sin\beta & \cos\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix}} \underset{(4\times1)}{\begin{bmatrix} V_i \\ W_i \\ V_j \\ W_j \end{bmatrix}} = \underline{\underline{T}}^e \underline{\underline{Q}}^e.$$

A transzformáció elvégzése (jelölés: $\sin\beta = s,\ \cos\beta = c$):

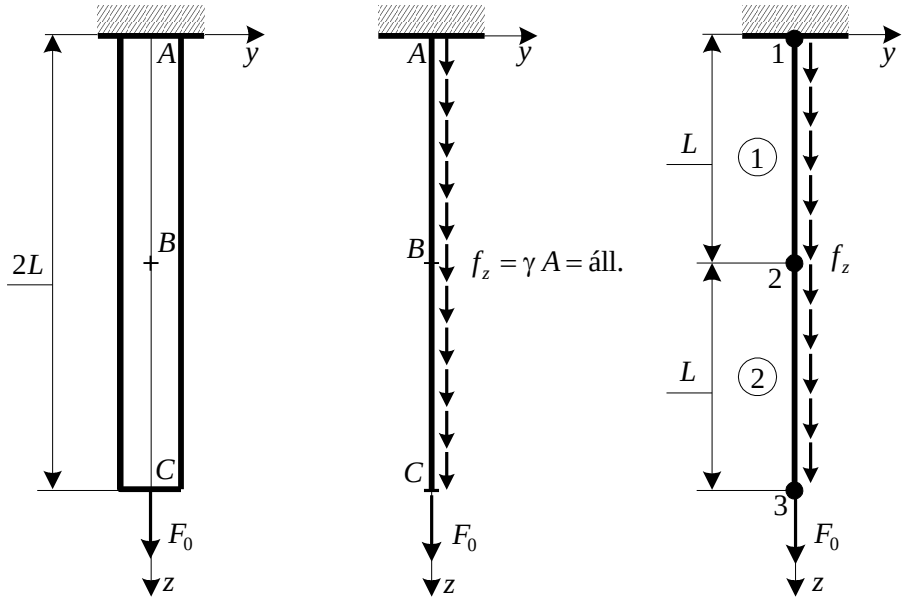
$$\underline{\underline{\hat{K}}}^e = \left(\underline{\underline{T}}^e\right)^T \underline{\underline{K}}^e \underline{\underline{T}}^e = \begin{bmatrix} s & 0 \\ c & 0 \\ 0 & s \\ 0 & c \end{bmatrix}\frac{AE}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s & c \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{AE}{L}\begin{bmatrix} s^2 & sc & -s^2 & -sc \\ sc & c^2 & -sc & -c^2 \\ -s^2 & -sc & s^2 & sc \\ -sc & -c^2 & sc & c^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{\hat{K}}}_{ii}^e & \underline{\underline{\hat{K}}}_{ij}^e \\ \underline{\underline{\hat{K}}}_{ji}^e & \underline{\underline{\hat{K}}}_{jj}^e \end{bmatrix}.$$

$$\underline{\underline{\hat{f}}}^e = \left(\underline{\underline{T}}^e\right)^T \underline{\underline{f}}_v^e = \begin{bmatrix} s & 0 \\ c & 0 \\ 0 & s \\ 0 & c \end{bmatrix}\frac{f_\zeta L}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{f_\zeta L}{2}\begin{bmatrix} s \\ c \\ s \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{\hat{f}}}_{vi}^e \\ \underline{\underline{\hat{f}}}_{vj}^e \end{bmatrix}.$$

Példa: önsúlyával és koncentrált erővel terhelt rúd alakváltozása.

Adott:
- a rúd keresztmetszetének A területe,
- a rúd anyagának E rugalmassági modulusa,
- a rúd L hossza,
- a rúd anyagának γ fajsúlya,
- az F_0 koncentrált terhelés,



Feladat: A B keresztmetszet w_B és a C keresztmetszet w_c elmozdulásának meghatározása végeselem módszerrel

A rúdmodell vonal mentén megoszló erőrendszerének sűrűsége $f_z = A\gamma = \text{áll.}$.
A helyi és a vonatkoztatási KR azonos $\Rightarrow$ az elemek a helyi KR-ben is összeilleszthetők.

Az 1 jelű elem jellemzői:

$$\underline{\underline{K}}^1 = \frac{AE}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^1, \qquad \underline{\underline{F}}^1 = \frac{\gamma AL}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}^1.$$

$$\Pi^1\left(w_{1,}^1 w_2^1\right) = \frac{1}{2}\frac{AE}{L}\left\{\left(w_1^1\right)^2 - 2w_1^1 w_2^1 + \left(w_2^1\right)^2\right\} - \frac{\gamma AL}{2}\left\{w_1^1 + w_2^1\right\}.$$

Az 2 jelű elem jellemzői:

$$\underline{\underline{K}}^2 = \frac{AE}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^2, \qquad \underline{\underline{F}}^2 = \frac{\gamma AL}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}^2.$$

$$\Pi^2\left(w_{2,}^2 w_3^2\right) = \frac{1}{2}\frac{AE}{L}\left\{\left(w_2^2\right)^2 - 2w_2^2 w_3^2 + \left(w_3^2\right)^2\right\} - \frac{\gamma AL}{2}\left\{w_2^2 + w_3^2\right\}.$$

Az egész szerkezet potenciális energiája: $\Pi = \Pi^1 + \Pi^2$.

Illesztési feltétel: $w_2^1 = w_2^2$.
További jelölés: $w_1 = w_1^1$, $\quad w_2 = w_2^1 = w_2^2$, $\quad w_3 = w_3^2$.

$$\Pi = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix}\frac{AE}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & (1+1) & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix}\left\{\frac{\gamma AL}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1+1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_{1z} \\ 0 \\ F_0 \end{bmatrix}\right\}$$

Lagrange-féle variációs elv:

$$\delta\Pi = \begin{bmatrix}\delta w_1 & \delta w_2 & \delta w_3\end{bmatrix}\left\{\frac{AE}{L}\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}w_1\\ w_2\\ w_3\end{bmatrix} - \frac{\gamma AL}{2}\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}F_{1z}\\ 0\\ F_0\end{bmatrix}\right\} = 0.$$

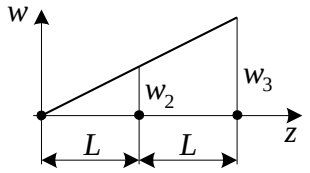
Kinematikai peremfeltétel: $w_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta w_1 = 0.$

A w_1 -el szorzott oszlopot és a δw_1 -el szorzott sort törölni kell.

A megoldandó lineáris algebrai egyenletrendszer: $\frac{AE}{L}\begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}w_2\\ w_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\gamma AL\\ \frac{\gamma AL}{2} + F_0\end{bmatrix}.$

Az egyenletrendszer megoldása: $w_2 = \frac{3}{2}\frac{\gamma L^2}{E} + \frac{F_0 L}{AE}, \qquad w_3 = 2\frac{\gamma L^2}{E} + 2\frac{F_0 L}{AE}.$

Ha a rudat súlytalannak tekintjük $(\gamma = 0)$, akkor egzakt megoldást kapunk.

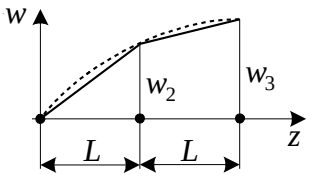


Egzakt megoldás:

$$w_2 = \frac{F_0}{AE}L,$$

$$w_3 = \frac{F_o}{AE}2L.$$

Ha a rúd csak a saját súlyával terhelt $(F_0 = 0)$, akkor közelítő megoldást kapunk.



Közelítő megoldás:

$$w_2 = \frac{3}{2}\frac{\gamma L^2}{E},$$

$$w_3 = 2\frac{\gamma L^2}{E.}$$

Ebben az esetben az egzakt megoldás másodfokú.

A támasztóerő meghatározása (visszahelyettesítés az első egyenletbe):

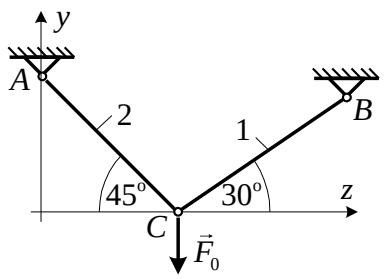
$$-\frac{AE}{L}w_2 = \frac{\gamma AL}{2} + F_{1z},$$

$$F_{1z} = -\frac{\gamma AL}{2} - \frac{AE}{L}\left(\frac{3}{2}\frac{\gamma L^2}{E} + 2\frac{F_0 L}{AE}\right) = -\frac{\gamma AL}{2} - \frac{3}{2}\gamma AL - F_0 = -\gamma \underbrace{A2L}_{G} = -G - F_0 \quad (\uparrow).$$

Példa: Koncentrált erővel terhelt csuklós rúdszerkezet.

Adott: $L_1 = L_2 = L, \quad A_1 = A_2 = A, \quad E_1 = E_2 = E.$

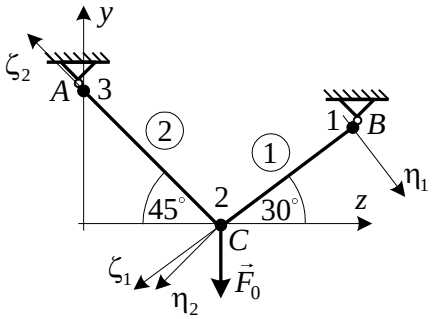
Feladat: A C csuklópont $\vec{u}_C = V_C\vec{e}_y + W_C\vec{e}_z$ elmozdulás vektorának meghatározása végeselem módszerrel.



Kidolgozás:

A végeselem modell létrehozása során a szerkezetet két húzott-nyomott lineáris rúdelemre bontjuk.

A helyi KR-ek felvétele:
A helyi és a globális KR-ek egymással bezárt szöge: $\alpha_1 = 210^{\circ}, \alpha_2 = 135^{\circ}$.



Az elemek z, y KR-ben vett merevségi mátrixa:

Az 1 jelű elem: $\cos^2\alpha_1 = 0,75;\quad \sin^2\alpha_1 = 0,25;\quad \sin\alpha_1\cos\alpha_1 = 0,43.$

$$\underline{\underline{\hat{K}}}^1 = \begin{bmatrix} \underline{\underline{\hat{K}}}^1_{11} & \underline{\underline{\hat{K}}}^1_{12} \\ \underline{\underline{\hat{K}}}^1_{21} & \underline{\underline{\hat{K}}}^1_{22} \end{bmatrix} = \frac{AE}{L}\begin{bmatrix} 0,25 & 0,43 & -0,25 & -0,43 \\ 0,43 & 0,75 & -0,43 & -0,75 \\ -0,25 & -0,43 & 0,25 & 0,43 \\ -0,43 & -0,75 & 0,43 & 0,75 \end{bmatrix}^1$$

A 2 jelű elem: $\cos^2\alpha_2 = 0,5;\quad \sin^2\alpha_2 = 0,5;\quad \sin\alpha_2\cos\alpha_2 = -0,5.$

$$\underline{\underline{\hat{K}}}^2 = \begin{bmatrix} \underline{\underline{\hat{K}}}^2_{22} & \underline{\underline{\hat{K}}}^2_{23} \\ \underline{\underline{\hat{K}}}^2_{32} & \underline{\underline{\hat{K}}}^2_{33} \end{bmatrix} = \frac{AE}{L}\begin{bmatrix} 0,5 & -0,5 & -0,5 & 0,5 \\ -0,5 & 0,5 & -0,5 & -0,5 \\ -0,5 & 0,5 & 0,5 & -0,5 \\ 0,5 & -0,5 & -0,5 & 0,5 \end{bmatrix}^2$$

A szerkezet lineáris algebrai egyenletrendszere általános jelölésekkel:

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{\hat{K}}}^1_{11} & \underline{\underline{\hat{K}}}^1_{12} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{\hat{K}}}^1_{21} & \left(\underline{\underline{\hat{K}}}^1_{22} + \underline{\underline{\hat{K}}}^2_{22}\right) & \underline{\underline{\hat{K}}}^2_{23} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{\hat{K}}}^2_{32} & \underline{\underline{\hat{K}}}^2_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{Q}}_1 \\ \underline{\underline{Q}}_2 \\ \underline{\underline{Q}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{\hat{f}}}^1_1 \\ \underline{\underline{\hat{f}}}^1_2 + \underline{\underline{\hat{f}}}^2_2 \\ \underline{\underline{\hat{f}}}^2_3 \end{bmatrix}.$$

A lineáris algebrai egyenletrendszer részletezve:

$$\frac{AE}{L}\begin{bmatrix} 0,25 & 0,43 & -0,25 & -0,43 & 0 & 0 \\ 0,43 & 0,75 & -0,43 & -0,75 & 0 & 0 \\ -0,25 & -0,43 & 0,75 & -0,067 & -0,5 & 0,5 \\ -0,43 & -0,75 & -0,067 & 1,25 & 0,5 & -0,5 \\ 0 & 0 & -0,5 & 0,5 & 0,5 & -0,5 \\ 0 & 0 & 0,5 & -0,5 & -0,5 & 0,5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ W_1 \\ V_2 \\ W_2 \\ V_3 \\ W_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{1y} \\ F_{1z} \\ -F_0 \\ 0 \\ F_{3y} \\ F_{3z} \end{bmatrix}.$$

Kinematikai peremfeltételek: $V_1 = W_1 = 0$ és $V_3 = W_3 = 0$.

A megoldandó lineáris algebrai egyenletrendszer: $\dfrac{AE}{L}\begin{bmatrix} 0,75 & -0,067 \\ -0,067 & 1,25 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_2 \\ W_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F_0 \\ 0 \end{bmatrix}.$

Az egyenletrendszer megoldása: $V_2 = -1,34\dfrac{L}{AE}F_0, \qquad W_2 = -0,072\dfrac{L}{AE}F_0$

A 2. csomópont elmozdulás-koordinátái az *y,z* koordináta-rendszerben.

A megoldás egzakt, mert a közelítő mezők tartalmazzák a pontos megoldást.

4.4. Végeselem programrendszerek általános felépítése

a) Adatbeviteli rész/modul:

- A szerkezet geometriai felépítésének megadása: pontok, vonalak, felületek, térfogatok.
- A szerkezet végeselem hálózatának megadása: elemek, csomópontok.

  Szempontok:
  - Azokon a tartományokon legyen sűrített a felosztás, ahol a mechanikai mennyiségek erőteljesebb változása várható.
  - A koncentrált erők/nyomatékok támadáspontjára essen csomópont.
  - A megtámasztási helyekre szintén legyen felvéve csomópont.

- A szerkezet anyagának megadása.

  Az anyagjellemzők geometriai (vonal, felület, térfogat), vagy végeselem jellemzőkhöz (véges elemek) is megadhatók.

  Speciális eset:
  - Rúdfeladatoknál itt kell megadni a rúd keresztmetszeti jellemzőit is. Pl.: $A, I_x, \ldots$
  - Héj-, lemez- és tárcsafeladatoknál itt kell megadni a vastagsági méretet.

- A szerkezet terhelésének megadása (koncentrált, megoszló terhelés, hőmérséklet eloszlás, …).
- A szerkezet megtámasztásának megadása.
  - megtámasztás (nincs elmozdulás),
  - rugalmas ágyazás (rugóállandók),
  - előírt elmozdulás (kinematikai terhelés).

b) A végeselem-számítási rész/modul.

- Az elemek merevségi mátrixainak és csomóponti terhelésvektorainak előállítása.
- Az egész szerkezet merevségi mátrixának és terhelési vektorainak (egyszerre több jobb oldal is lehetséges) előállítása.
- A kinematikai peremfeltételek figyelembevétele (megfelelő sorok és oszlopok törlése).
- A szerkezet lineáris algebrai egyenletrendszerének megoldása $\Rightarrow$ a szerkezet csomóponti elmozdulásainak meghatározása.
- Alakváltozás, feszültség (belső erők) számítása elemenként a csomópontokban, vagy az elem belső pontjaiban. Az alakváltozási jellemzők, feszültségek csomóponti értékeit az egyes elemekről az adott csomópontba számított értékek átlagolásával szokás előállítani.

c) Az eredmények szemléltetését végző rész/modul.

A felhasználó eldönti, hogy a szerkezet szilárdságtani állapotai közül mit vizsgál részletesen, mit szemléltet.

- A szerkezet pontjainak elmozdulását (deformált alak).
- Feszültségeket (az egyes feszültsége-koordinátákat külön-külön, vagy a redukált feszültségeket), igénybevételeket, támasztóerőket.